ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
часть 1
ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Учебное пособие

г. Ставрополь
2018

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

Литвин, Д.Б.
Методы оптимальных решений, часть 1. Линейное программирование, транспортная задача: Учебное пособие / Д.Б. Литвин. – Ставрополь : Сервисшкола, 2018. – 84с.

Пособие предназначено для студентов направления Экономика - 38.03.01 очной и заочной форм обучения.

Содержание материала в целом соответствует первой части дисциплины «Методы оптимальных решений».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание призвано помочь освоить студентам экономических специальностей использование методов линейного программирования в организационно-экономических и производственных системах.

Оптимизационные модели позволяют найти из множества возможных (альтернативных) вариантов наилучший план производства, распределения капиталовложений или составления какой-либо смеси и пр. При этом запас ресурсов будет использован наиболее эффективным образом для достижения поставленной цели.

Целью изучения данного раздела математики является знакомство с задачами организационно-экономического управления и освоение математических методов как инструмента их решения.

В процессе изучения у студентов должны быть сформированы теоретические знания, необходимые для моделирования экономических систем и решения поставленных математических задач, а также практические навыки такого решения и анализа полученных результатов.

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Общая задача линейного программирования

Пусть задана система ***m*** линейных уравнений и неравенств с ***n*** переменными:

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ \qquad x_{1,2\ldots n} \geq 0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad A_{m\times n}x_n = B_m \tag{1}$$

и линейная функция

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = c^T x \tag{2}$$

Необходимо найти такое решение системы $x^* = \left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)^T$, при котором линейная функция **z** принимает оптимальное (max или min) значение.

Систему (1) называют *системой ограничений***,** а функцию z - *линейной целевой функцией,* или функцией цели.

Оптимальным решением или оптимальным планом ЗЛП называется такое решение $x^* = \left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)^T$ системы ограничений, при котором линейная функция **z** принимает оптимальное значение.

Если система ограничений (1) состоит из одних неравенств, то считается, что ЗЛП задана в ***стандартном*** виде; если же из одних уравнений, то - в ***каноническом*** виде; если же есть уравнения и неравенства - то в ***общем*** *виде*.

Чтобы перейти от стандартного задания к каноническому виду, вводят дополнительные неотрицательные переменные:

со знаком «+», если функция $\leq b$,

со знаком «-», если функция $\geq b$.

Пример: Пусть задана общая система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ 5x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \leq & + \\ \geq & - \\ \leq & + \end{matrix} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0 \end{cases}$$

общая задача $\qquad\qquad$ каноническая задача

1.2. Геометрический смысл системы неравенств

Пусть дана система линейных неравенств с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \qquad (3)$$

Геометрический смысл неравенства $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$ ***- полуплоскость, все точки которой ему удовлетворяют***. Уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ определяет на плоскости OX_1X_2 прямую, которая называется ***граничной***.

В том случае, если система неравенств (3) совместна, *область ее допустимых решений (ОДР)* есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям.

Множество называется ***выпуклым***, если оно вместе со своими любыми двумя точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки. Или для любых двух точек x_1 и x_2, принадлежащих множеству X, ему принадлежат также все точки *x*, для которых справедливо равенство

$$x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

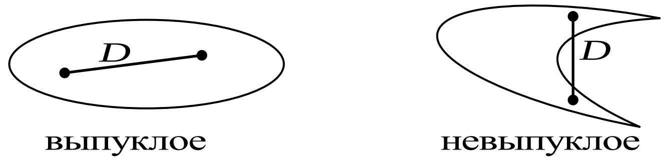


Рисунок 1 - К определению выпуклого множества

Область допустимых решений D может быть замкнутой (ограниченной), открытой (неограниченной) и пустым множеством (система ограничений противоречива) , как показано на рисунке 2 для плоскости.

Рисунок 2 - Виды областей допустимых решений (ОДР)

Доказывается, что ***ОДР ЗЛП - всегда выпуклое множество точек.***

Область допустимых решений задается с помощью системы неравенств (3).

Пример 1. Построить множество (область) ДР для системы неравенств:

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x_2 \le 6 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

Уравнения линий:

$\ell_1:\ -5x_1 + 4x_2 = 20$

x_1	0	-4
x_2	5	0

$\ell_2:\ 2x_1 + 3x_2 = 24$

x_1	0	12
x_2	8	0

$\ell_3:\ x_1 - 3x_2 = 3$

x_1	0	3
x_2	-1	0

$\ell_4:\ x_2 = 6;$

$\ell_5:\ x_1 = 0;$ $\quad \ell_6:\ x_2 = 0.$

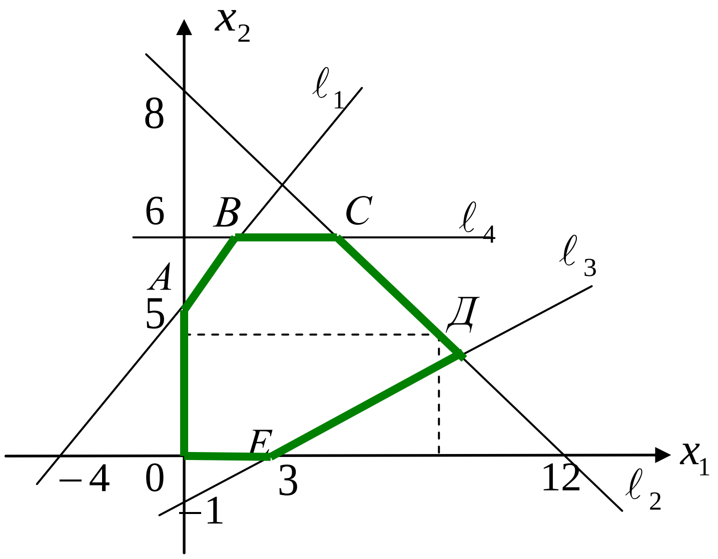


Рисунок 3 - Область допустимых решений (ОДР)

Для определения полуплоскости, которая удовлетворяет соответствующему неравенству, удобно использовать координаты точки О (0;0). Если при их подстановке в неравенство, оно является истинным, то это неравенство определяет всю полуплоскость, содержащую начало координат.

$0+0 \le 20 \quad (\text{верно}); \quad 0+0 \le 24 \quad (\text{верно}); \quad 0-0 \le 3 \quad (\text{верно}).$

Точки О, А, В, С, Д, Е - вершины области решений или *угловые точки*.

Геометрический смысл системы неравенств на плоскости – это выпуклая область (многоугольник), каждая точка которой является допустимым решением ЗЛП.

По аналогии заключаем, что *ОДР в пространстве, определяемая системой неравенств с 3-мя переменными, может представлять выпуклый многогранник.*

Если систему ограничений (3) привести к каноническому виду добавлением новых переменных $x_3, x_4, ..., x_{2+m}$, например для рассматриваемой задачи

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x_2 \le 6 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 3 \\ x_2 + x_6 = 6 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases},$$

то подстановкой координат точек можно убедиться, что области ДР будут соответствовать только неотрицательные значения дополнительных переменных. При этом в угловых точках ОДР дополнительные переменные, соответствующие пересекающимся линиям, равны нулю. Например, в точке Д (см. рисунок 3), где пересекаются линии ℓ_1 и ℓ_3, нулю равны переменные x_3 и x_5.

1.3. Геометрический метод решения ЗЛП с n=2

Геометрический способ решения ЗЛП целесообразно использовать для:

- решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами;
- решения задач со многими переменными при условии, что **в *их канонической*** записи содержится ***не более двух*** свободных переменных.

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \quad (4)$$

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \;\to\; \max(\min) \quad (5)$$

Целевая функция (5) определяет на плоскости семейство параллельных прямых, каждой из которых соответствует определенное значение Z.

1.3.1. План решения ЗЛП геометрическим методом

1. Строится ОДР *X*. Если $X = \varnothing$, то задача не имеет решения.
2. Строим вектор градиента целевой функции

$$\overline{N} = grad(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}; \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) = (c_1; c_2)$$

- *нормальный вектор,* он указывает направление возрастания целевой функции z.

Прямая, перпендикулярная вектору $\overline{N}(c_1;c_2)$, определяет *множество равных значений* целевой функции

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = const$$

3. Строим прямую равных значений ℓ_0, проходящую через начало координат

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 = 0.$$

В каждой точке этой прямой целевая функция равна нулю.

4. Мысленно перемещаем прямую ℓ_0 в направлении вектора $\overline{N}(c_1;c_2)$, тогда:

ближайшая угловая точка встречи ℓ_0 с областью *X* является точкой **min z**, а самая дальняя угловая точка встречи, является точкой **max z**.

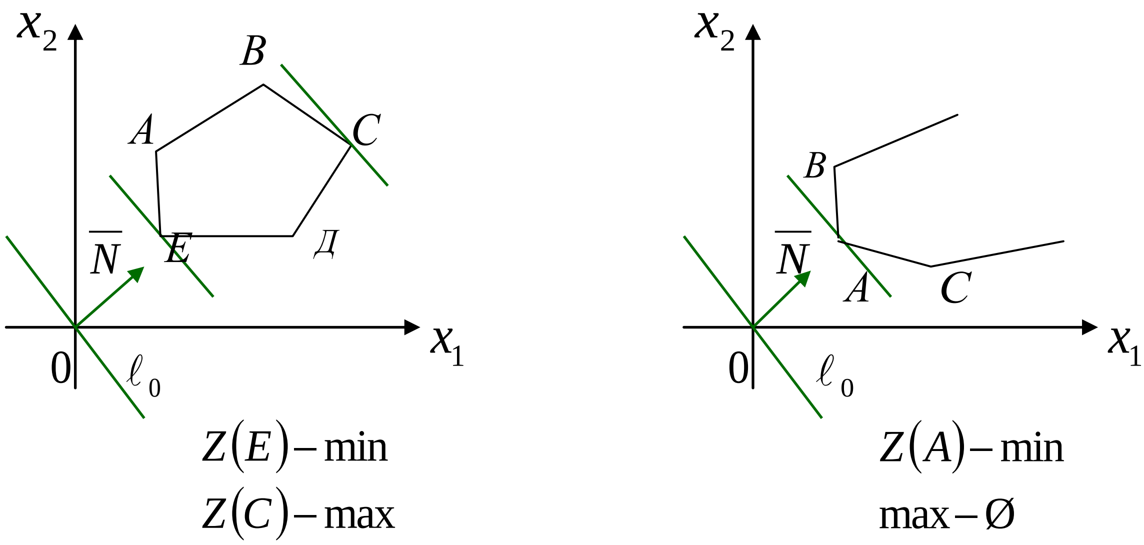


Рисунок 4 - Геометрический метод решения ЗЛП

На втором рисунке задача на **max** решений не имеет, т.е. **Z** не ограничена сверху (аналогично может быть не ограничен **min).**

<u>Замечание</u>. Если прямая ℓ_0 при перемещении совпадает с отрезком области *X*, то все точки этого отрезка являются решениями задачи. В этом случае оптимальных решений бесчисленное множество.

Поскольку, ОДР ЗЛП на плоскости представляет собой выпуклый многоугольник, то ***оптимальное решение ЗЛП находится, по крайней мере, в одной из угловых точек ОДР***.

1.3.2. Пример решения ЗЛП на плоскости (с n=2)

Пример. Определение оптимального ассортимента продукции.

Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$ которые поступают в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – *A* и *B*. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют *9* и *13* единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ дан в таблице 1.

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на *1* ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает *2* ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: *3* д. е. – для $П_1$ и *4* д. е. для $П_2$.

Таблица 1

Расход сырья продукции

Сырье	Расход сырья на *1* ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
A	2	3	9
B	3	2	13
Цена, д.е.	3	4	

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Построение математической модели задачи

Предположим, что предприятие изготовит

x_1 - единиц продукции $П_1$ и

x_2 - единиц продукции $П_2$.

Тогда должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 \le 9; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13; \\ x_1 - x_2 \le 1; \\ x_2 \le 2; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{gathered} \qquad (6)$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц продукции $П_2$ составит

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max . \qquad (7)$$

Решение.

Построим многоугольник решений (рис.5). Для этого в системе координат $X_1 0 X_2$ на плоскости изобразим граничные прямые:

$$2x_1 + 3x_2 = 9 \qquad (L_1);$$
$$3x_1 + 2x_2 = 13 \qquad (L_2);$$
$$x_1 - x_2 = 1 \qquad (L_3);$$
$$x_2 = 2 \qquad (L_4).$$

Для построения прямой $Z = 3x_1 + 4x_2 = 0$ строим вектор – градиент $\overline{C} = (3;4)$ и через точку 0 проводим прямую, перпендикулярную ему.

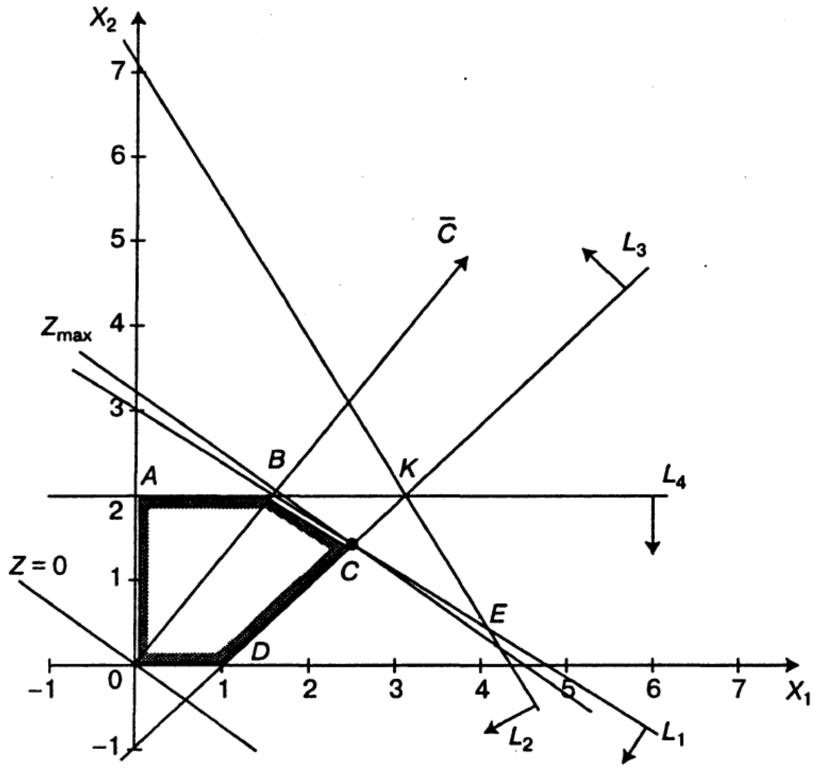


Рисунок 5 – Решение ЗЛП геометрическим способом

Построенную прямую $Z = 0$ перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{C}$. Из рис. 5 следует, что по отношению к многоугольнику решений опорной эта прямая становится в точке *C*, где функция принимает максимальное значение. Точка *C* лежит на пересечении прямых L_1 и L_3. Для определения ее координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9; \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_2 = 7; \\ 5x_1 = 12. \end{cases}$$

Оптимальный план задачи $x_1 = 2,4$; $x_2 = 1,4$. Подставляя значения x_1 и x_2 в линейную функцию, получим:

$$Z_{\max} = 3 \cdot 2,4 + 4 \cdot 1,4 = 12,8.$$

Полученное решение означает, что объем производства продукции $П_1$ должен быть равен *2,4* ед., а продукции $П_1$ – *1,4* ед. Доход, получаемый в этом случае, составит: $Z = 12,8$ д. е.

Задания для решения в аудитории

1. Производственному участку может быть запланировано к изготовлению на определённый плановый период времени два вида изделий: A и B . На производство единицы изделия A оборудование первого типа используется *1* час, оборудование второго типа - *4* часа. На производство единицы изделия B оборудование первого типа используется *2* часа, оборудование второго типа - *2* часа.

Фонд полезного времени первого типа оборудования составляет *120* часов, второго типа оборудования – *240* часов. Отпускная цена единицы изделия A составляет *4* руб., а изделия B - *6* руб.

Спланировать выпуск изделий A и B при условии, что план должен быть выполнен в стоимостном выражении на сумму не менее *320* руб. и оборудование первого типа должно быть загружено минимально.

Решить задачу графическим методом.

2. При производстве двух видов краски A и B предприятием используется три компонента. Расход каждого вида компонента на единицу продукции и запасы компонентов приведены в таблице Прибыль от производства краски вида A - 3 усл. ед., краски вида B – 2 усл. ед. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, решить задачу графически.

Компоненты	Расход компонента на единицу продукции		Запасы компонентов
	A	B	
1	1	2	6
2	2	1	8
3	0	1	2
Прибыль	3	2	

3. В рационе животных используется два вида кормов. Животные должны получать три вида веществ. Составить рацион кормления, обеспечивающий минимальные затраты и решить задачу графически. Данные приведены в таблице:

Питательные вещества	Содержание питательного вещества в единице корма		Необходимое количество питательных веществ
	А	В	
1	2	1	12
2	1	1	10
3	2	3	24
Цена	60	60	

4. Леспромхоз, имеющий лесопильный и фанерный цеха, столкнулся с проблемой наиболее рационального использования выделенной лесосеки. Чтобы получить 2,5 м^3 коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2,5 м^3 еловых и 7,5 м^3 пихтовой древесины. Для изготовления 100 м^2 фанеры требуется 5 м^3 еловых и 10 м^3 пихтовой древесины. Выделенная лесосека содержит 80 м^3 еловых и 180 м^3 пихтовой древесины. Согласно условиям поставок, в течение планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 10 м^3 пиломатериалов и 1200 м^2 фанеры. Доход с 1 м^3 пиломатериалов составляет 80000 руб., а со 100 м^2 фанеры - 300000 руб. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, решить задачу графически.

1.4. Анализ моделей на чувствительность

В рамках анализа выявляется чувствительность полученного оптимального решения к изменениям параметров исходной модели.

При таком анализе всегда рассматривается комплекс линейных оптимизационных моделей. Это придает модели определенную динамичность, позволяющую исследователю проанализировать влияние возможных изменений исходных условий на полученное ранее оптимальное решение.

Рассмотрим *основные задачи анализа на чувствительность* на приведенном выше примере.

1.4.1. Анализ изменений запасов ресурсов

Данный анализ призван ответить на два вопроса:

1. На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции *Z*?
2. На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции *Z*?

Ограничение линейной модели называют **связывающим (активным)** если прямая ему соответствующая проходит через оптимальную точку. В противном случае – ограничение **несвязывающее (неактивное).**

На рис.5 связывающими ограничениями являются ограничения, представленные прямыми L_1 и L_3. Ограничение L_1 определяет запасы сырья *A*. Ограничение L_3 определяет соотношение спроса на выпускаемую продукцию.

Ресурс, количество которого определяет активное ограничение, называется **дефицитным**, так как он используется полностью. В противном случае, ресурс - **недефицитный** (т.е. имеющийся в некотором избытке).

В нашем примере несвязывающими ограничениями являются L_2 и L_4. Следовательно, сырье *B* – недефицитный ресурс, т. е. имеется в избытке, а спрос на продукцию $П_2$ не будет удовлетворен полностью (в таблице — ресурсы 2 и 4).

При анализе модели на чувствительность по правым частям ограничений определяются:

1) предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение;

2) предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденное ранее оптимальное значение целевой функции.

В нашем примере сырье *А* и соотношение спроса на выпускаемую продукцию $П_1$ и $П_2$ являются дефицитными ресурсами (в табл.1 – ресурсы 1, 3).

Рассмотрим сначала ресурс – сырье *А.* На рис. 6 при увеличении запаса этого ресурса прямая L_1 перемещается вверх, параллельно самой себе, до точки *К*, в которой пересекаются линии ограничений L_2, L_3 и L_4. В точке *К* ограничения (2), (3) и (4) становятся связывающими; оптимальному решению при этом соответствует точка *К,* а множеством допустимых решений становится многоугольник $АКДО$. В точке *К* ограничение (1) (для ресурса *А)* становится избыточным, так как любой дальнейший рост запаса соответствующего ресурса не влияет ни на пространство решений, ни на оптимальное решение.

Таким образом, объем ресурса *А* не следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение (1) становится избыточным, т. е. прямая (1) проходит через новую оптимальную точку *К*. Этот предельный уровень определяется следующим образом. Устанавливаются координаты точки *К*, в которой пересекаются прямые L_2, L_3 и L_4 т. е. находится решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 13; \\ x_1 - x_2 = 1; \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

В результате получается $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$. Затем, путем подстановки координат точки *К* в левую часть ограничения (1), определяется максимально допустимый запас ресурса *А:*

$$2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12.$$

Рисунок 7 иллюстрирует ситуацию, когда рассматривается вопрос об изменении соотношения спроса на продукцию П1 и П2.

Новой оптимальной точкой становится точка *Е,* где пересекаются прямые L_1 и L_2. Координаты данной точки находятся путем решения системы уравнений (1) и (2) следующим образом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9; \\ 3x_1 + 2x_2 = 13. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5/3\, x_2 = 1/3; \\ -5/2\, x_1 = -21/2. \end{cases}$$

В результате получается $x_1 = 4,2;$ $x_2 = 0,2$, причем суточный спрос на продукцию $П_1$ не должен превышать спрос на продукцию $П_2$ на величину $x_1 - x_2 = 4,2 - 0,2 = 4$ ед.

Дальнейшее увеличение разрыва в спросе на продукцию Π_1 и Π_2 не будет влиять на оптимальное решение.

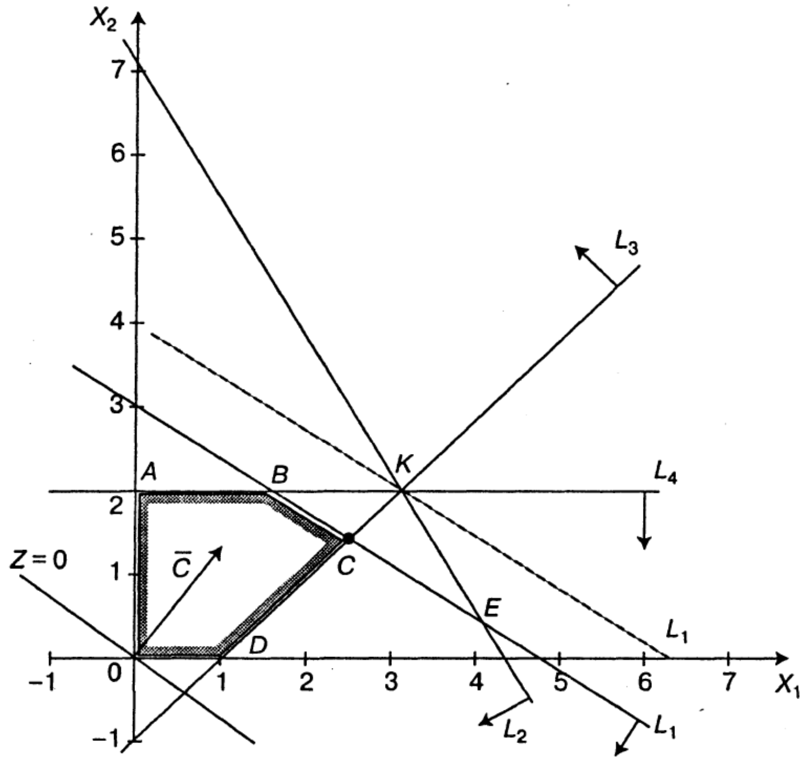


Рисунок 6 - Геометрическая интерпретация решения задачи линейного программирования (изменение ресурса *A)*

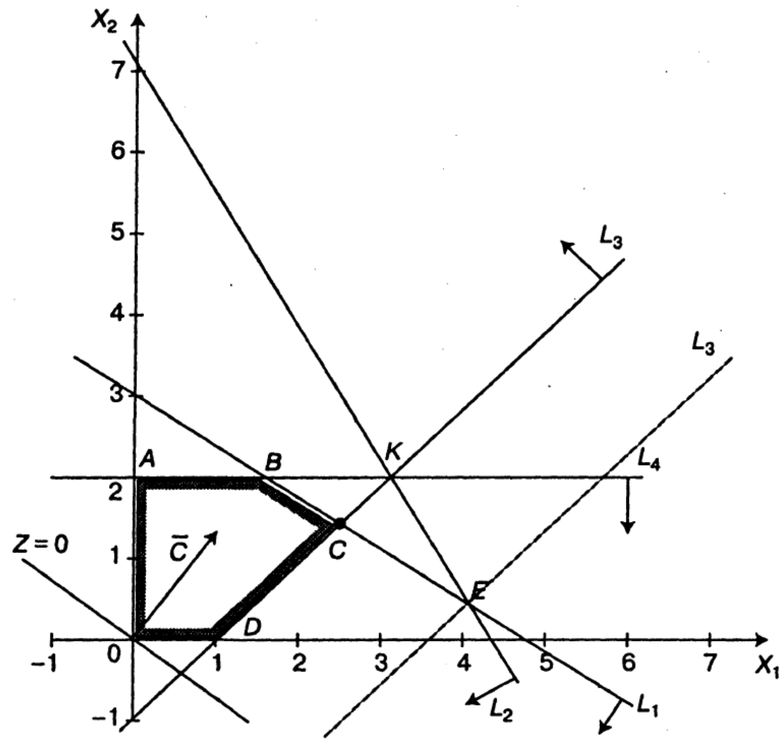


Рисунок 7 - Геометрическая интерпретация решения ЗЛП (изменение спроса на продукцию)

Рассмотрим вопрос об уменьшении правой части несвязывающих ограничений.

Ограничение (4) $x_2 \le 2$ фиксирует предельный уровень спроса на продукцию $П_2$. Из рис. 5 следует, что, не изменяя оптимального решения, прямую L_4 *(AB)* можно опускать вниз до пересечения с оптимальной точкой *C*. Так как точка С имеет координаты $x_1 = 2,4;\ x_2 = 1,4$, уменьшение спроса на продукцию $П_2$ до величины $x_2 = 1,4$ никак не повлияет на оптимальность ранее полученного решения.

Рассмотрим ограничение (2) $3x_1 + 2x_2 \le 13$, которое представляет собой ограничение на недефицитный ресурс – сырье *B*. И в этом случае правую часть – запасы сырья *B* – можно уменьшать до тех пор, пока прямая L_2 не достигнет точки *C*. При этом правая часть ограничения (2) станет равной $3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 2,4 + 2 \cdot 1,4 = 10$, что позволяет записать это ограничение в виде: $3x_1 + 2x_2 \le 10$. Этот результат показывает, что ранее полученное оптимальное решение не изменится, если суточный запас ресурса *B* уменьшить на *3* ед.

1.4.2. Определение наиболее выгодного ресурса

Какому из ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств?

Обозначим ценность дополнительной единицы ресурса *i* через y_i. Величина y_i определяется из соотношения

$$y_i = \frac{\textit{Максимальное приращение Z}}{\textit{Максимально допустимый прирост ресурса i}}.$$

Результаты расчета представлены в таблице 2:

Таблица 2

Ресурс	Тип ресурса	Максимальное изменение запаса ресурса, ед.	Максимальное увеличение дохода от изменения ресурса, у. д. е.	Ценность дополнительной единицы ресурса
1 (A)	Дефицитный	$12 - 9 = +3$	$17 - 12,8 = +4,2$	$4,2/3 = 1,4$
2 (B)	Недефицитный	$10 - 13 = -3$	$12,8 - 12,8 = 0$	$0/(-3) = 0$
3	Дефицитный	$4 - 1 = +3$	$13,4 - 12,8 = +0,6$	$0,6/3 = 0,2$
4	Недефицитный	$1,4 - 2 = -0,6$	$12,8 - 12,8 = 0$	$0/(-0,6) = 0$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что дополнительные вложения в первую очередь следует направить на увеличение ресурса *А* и лишь затем – на формирование соотношения спроса на продукцию $П_1$ и продукцию $П_2$. Что касается недефицитных ресурсов, то их объем увеличивать не следует, а на их запасах можно сэкономить.

1.4.3. Определение пределов изменения коэффициентов целевой функции

Анализ позволяет ответить на вопросы:

1) каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?

2) на сколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным, и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

Ответим на поставленные вопросы на нашем примере.

Рассматривая первый вопрос, обозначим через c_1 и c_2 доходы предприятия от продажи единицы продукции $П_1$ и $П_2$ соответственно. Тогда целевую функцию можно представить в следующем виде:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

На рис. 5 видно, что *при увеличении* c_1 *или уменьшении* c_2 *прямая, представляющая целевую функцию Z, вращается (вокруг точки С) по часовой стрелке.* Если же c_1 уменьшается или c_2 увеличивается, эта прямая вращается в противоположном направлении – против часовой стрелки. Таким образом, точка *С* будет оставаться оптимальной точкой до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых для ограничений (1) и (3).

Когда наклон прямой *Z* станет равным наклону прямой L_1, получим две альтернативные оптимальные угловые точки – *С* и *В*. Аналогично, если наклон прямой *Z* станет равным наклону прямой для ограничения (3), будем иметь альтернативные оптимальные угловые точки *С* и *D*. Наличие альтернативных оптимумов свидетельствует о том, что одно и то же оптимальное значение *Z* может достигаться при различных значениях переменных x_1 и x_2. Как только наклон прямой выйдет за пределы указанного выше интервала c_1, получим некоторое новое оптимальное решение.

Рассмотрим на нашем примере, каким образом можно найти допустимый интервал изменения c_1, при котором точка C остается оптимальной. Исходное значение коэффициента $c_2 = 4$ оставим неизменным. На рис.5 видно, что *значение c_1 можно уменьшать до тех пор, пока прямая Z не совпадет с прямой L_1 (отрезок BC).*

Это крайнее минимальное значение коэффициента c_1 можно определить из равенства углов наклонов прямой Z прямой L_1. Так как тангенс угла наклона для прямой Z равен $-c_1/4$, а для прямой (1) равен $-2/3$, то минимальное значение c_1 определим из равенства $c_1/4 = 2/3$, откуда $\min c_1 = 8/3$.

На рис.5 видно, что значение c_1 можно увеличивать беспредельно, так как прямая Z при $c_2 = 4$ и $c_1 \to +\infty$ не совпадает с прямой L_3 (отрезок DC) и, следовательно, точка C при всех значениях коэффициента $c_1 \geq 8/3$ будет единственной оптимальной.

Как только коэффициент c_1 становится меньше $8/3$, оптимум смещается в точку B.

Можно заметить, что, как только коэффициент c_1 оказывается меньше $8/3$, ресурс *3* становится недефицитным, а ресурс *4* – дефицитным. Для предприятия это означает следующее: если доход от продажи единицы продукции $П_1$ станет меньше $8/3$ д. е., то наиболее выгодная производственная программа предприятия должна предусматривать выпуск максимально допустимого количества продукции $П_2$ (полностью удовлетворять спрос на продукцию $П_2$).

При этом соотношение спроса на продукцию $П_1$ и $П_2$ не будет лимитировать объемы производства, что обусловит недефицитность ресурса (3). Увеличение коэффициента c_1 свыше $8/3$ д. е. не снимает проблему дефицита ресурсов (1) и (3). Точка C – точка пересечения прямых L_1 и L_3 остается все время оптимальной.

Задания для решения в аудитории.

Провести анализ моделей на чувствительность.

1. Фирма выпускает два вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы даны в таблице

Исходный продукт	*Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого*		*Запас, кг.*
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более, чем на 100 кг. Кроме того, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг. В сутки. Розничная цена 1 кг сливочного мороженого 16 р., шоколадного 14 р.

Какое количество мороженого каждого виды должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

2. Фермер на своем участке выращивает огурцы и помидоры. Чтобы не потерять урожай он использует азотные фосфатные и калийные удобрения. Чтобы удобрить один гектар огурцов ему необходимо 20 ед. азотных удобрений, 40 – калийных, 10 – фосфатных, 20 – навоза; помидоров – 10 – калийных, 15 – фосфатных, 10 – навоза. Запасы удобрений следующие: азотных – 120, калийных – 320, фосфатных 160, навоза – 180. Прибыль с 1 га площади, засаженной огурцами, – 5000 у.д.е., а помидорами – 3000 у.д.е. Сколько гектаров огурцов и помидоров необходимо обработать для получения максимальной прибыли?

1.5. Геометрическое решение ЗЛП с n>2

Геометрическим способом можно также решать задачи линейного программирования **с числом переменных более двух**, при условии, что в их **канонической записи содержится не более двух свободных переменных** $n-m\le 2$.

Рассмотрим этот случай на примере:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_i \ge 0, \quad i=\overline{1,4} \end{cases} \tag{8}$$

$$z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max \tag{9}$$

Перепишем систему (8) в матричном виде:

$$A\cdot x = b \qquad z = c\cdot x \to \max$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad z = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Пусть $x_B = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \end{pmatrix}^T$ - базисные переменные, а $x_F = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$ - свободные, при этом обязательно, чтобы выполнялось условие $\det A_B \ne 0$.

$$A_B x_B + A_F x_F = b;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$z = c\cdot x = c_B x_B + c_F x_F;$$

$$z = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Выразим базисные переменные через свободные

$$A_B\cdot x_B = b - A_F\cdot x_F; \qquad x_B = A_B^{-1}\left(b - A_F x_F\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4 \\ -0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1,4 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Учитывая неотрицательность переменных, из последнего выражения получим новую систему ограничительных неравенств относительно только свободных переменных

$$\begin{cases} 1,4 - 1,4x_3 \ge 0 \\ -0,3 - 0,5x_2 + 1,3x_3 \ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_3 \le 1 \\ -5x_2 + 13x_3 \ge 3 \end{cases}.$$

Подставив выражения (10) в целевую функцию (9), выразим ее также только через $x_F = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$

$$z = c_B A_B^{-1} b + \left(c_F - c_B A_B^{-1} A_F \right) x_F$$

$$z = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,4 - 1,4x_3 \\ -0,3 - 0,5x_2 + 1,3x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$z = 5,9 - 1,5x_2 - 5,9x_3 \to \max \qquad (11)$$

Таким образом, исходная задача ЛП многих переменных сведена к задаче двух переменных

$$\begin{cases} x_3 \le 1 \\ -5x_2 + 13x_3 \ge 3 \end{cases}$$

$$z = 5,9 - 1,5x_2 - 5,9x_3 \to \max,$$

геометрическая интерпретация решения которой представлена на рисунке 8.

Согласно рисунку целевая функция принимает максимальное значение в точке А с координатами (0;0,23):

$$\begin{cases} L_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -5x_2 + 13x_3 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 3/13 = 0,23 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Максимальное значение целевой функции

$$z = 5,9 - 5,9 \cdot 0,23 \approx 4,54.$$

Для отыскания оптимального плана исходной задачи подставляем в преобразованную систему (10) x_2, x_3.

Окончательно получаем $x^T = \left(1,078;\ 0;\ 0,23;\ 0,001\right)$.

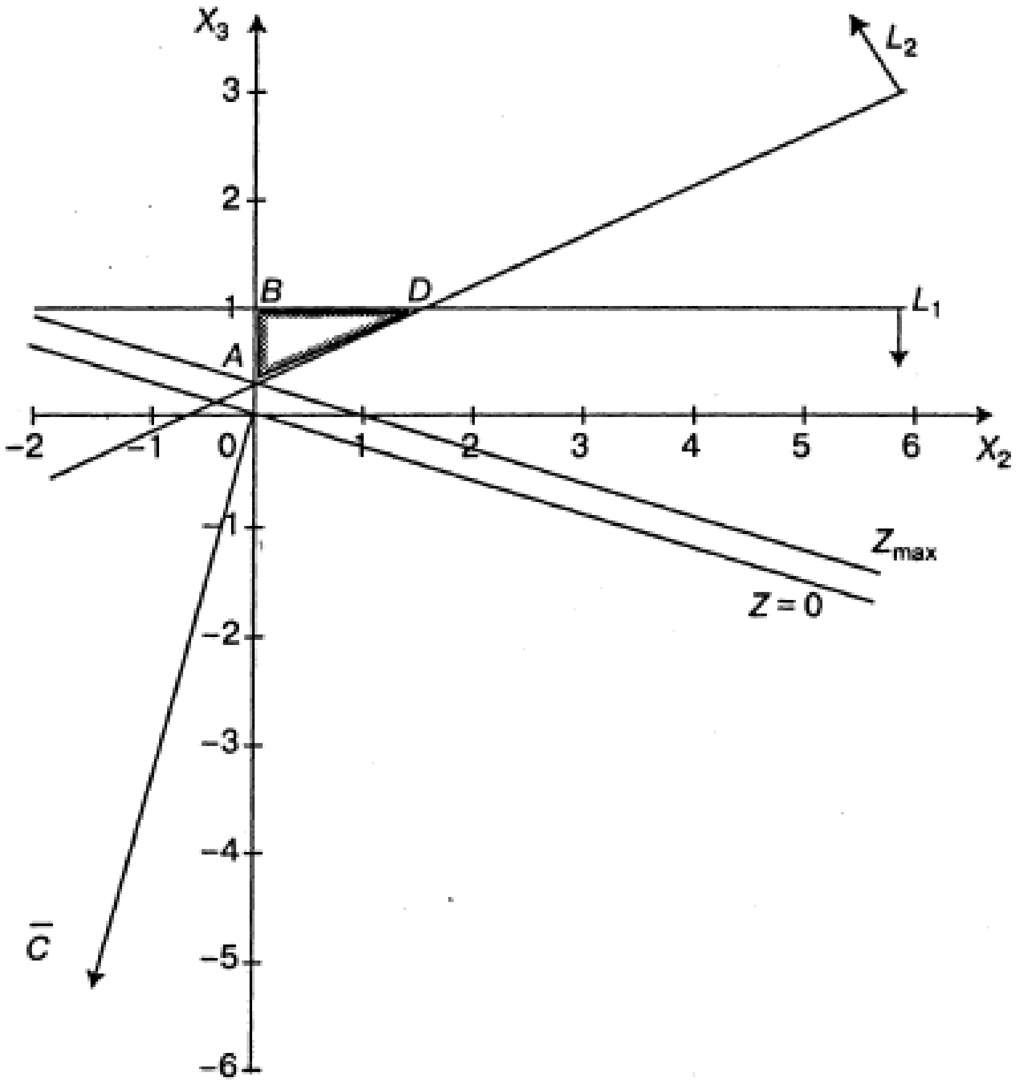


Рисунок 8. Геометрическая интерпретация решения ЗЛП с n>2

1.6. Введение в симплекс-метод решения ЗЛП

Симплекс – простейший, выпуклый многогранник. На плоскости это треугольник, в пространстве – тетраэдр и т.д.

Графический метод решения ЗЛП имеет существенное ограничение по числу варьируемых переменных (свободных переменных в канонической системе ограничений). Таких переменных должно быть не более двух, чтобы имелась возможность рассматривать задачу на плоскости.

Симплекс-метод призван снять это ограничение.

Пусть требуется найти максимум целевой функции:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \qquad (12)$$

а система ограничений содержит $\boldsymbol{m}$ неравенств относительно $\boldsymbol{n}$ переменных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{13}$$
$$x_{1\ldots n} \ge 0$$

Добавив ***m*** неотрицательных переменных $x_{n+1} \ge 0,\ldots,x_{n+m} \ge 0$ по числу неравенств, приведем задачу к каноническому виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \tag{14}$$
$$x_{1\ldots n+m} \ge 0$$

Всего получается ***n+m*** переменных. Задача в этом случае принимает простейший матричный вид

$$F_{\max} = c \cdot x, \quad \text{где} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n & 0_{n+1} & \ldots & 0_{n+m} \end{pmatrix}; \tag{15}$$
$$x_{1\ldots n+m} \ge 0.$$

Основные положения ЛП для случая n переменных

- ОДР ЗЛП представляет собой выпуклое множество – многогранник в n-мерном пространстве (n - количество исходных переменных).
- Если ЗЛП имеет оптимальное решение, то оно соответствует хотя бы одной угловой точке многогранника решений (ОДР).
- *Угловая точка многогранника в n-мерном пространстве является точкой пересечения **n** различных гиперплоскостей, каждая из которых задается одним уравнением системы ограничений (14) — в точности, как три плоскости образуют трехмерный угол.*
- *В угловой точке **n** переменных равны нулю – эти переменные называются **свободными** $x_F = 0$, а само решение относительно оставшихся ненулевых **m** переменных $x_B \ge 0$– **базисным**.*
- Отыскать оптимальное решение можно перебором всех базисных допустимых ($x_{n+1,\ldots,n+m} \ge 0$) решений - угловых точек многогранника, вычисляя в них значение целевой функции z и выбирая наилучшее.

Всего угловых точек достаточно много $C_{n+m}^n = \dfrac{(n+m)!}{n!m!}$, при этом лишь часть из них принадлежат многограннику допустимых решений.

Очевидно, что метод простого перебора - не самый лучший.

Симплекс-метод представляет собой алгоритм, по которому из некоторой начальной допустимой угловой точки многогранника осуществляется переход в соседний угол вдоль одного из n ребер.

Дж. Данциг предложил двигаться вдоль того ребра, которое гарантирует увеличение значения целевой функции. Постепенно двигаясь, достигнем особого угла, для которого уже все направления станут недопустимыми, а z примет оптимальное значение.

1.7. Геометрическая интерпретация симплекс-метода

Рассмотрим пример, ОДР которого представлена на рисунке 9.

Для этого примера m=6, n=2. Всего существует

$$C_{n+m}^{n}=\frac{(n+m)!}{n!m!};\qquad C_{2+6}^{2}=\frac{8!}{2!6!}=\frac{8\cdot 7}{2}=28$$

всевозможных углов, из них только 6 соответствуют допустимым решениям.

Алгоритм решения задачи:

- определить способ вычисления **начального допустимого** решения задачи.
- определить **признак оптимальности,** с помощью которого можно проверить, не является ли это решение оптимальным.
- Если нет, то нужно определить по какому из n ребер многогранника следует двигаться до соседней угловой точки, приближающей нас к цели.

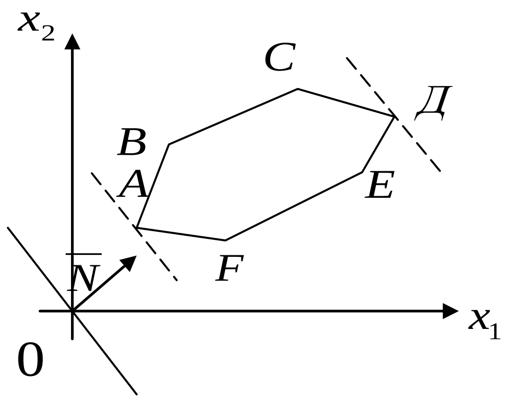


Рисунок 9 - ОДР с m=6+2 ограничениями

Формально алгоритм симплекс-метода весьма близок к рассмотренному выше алгоритму геометрического решения ЗЛП с n>2 (см. п.1.5). Однако, в данном случае снимается ограничение на количество базисных переменных x_B.

Поскольку любая вершина (угловая точка) многогранника в n-мерном пространстве образована пересечением ***n*** гиперплоскостей, то соответствующие им ***n свободные переменные*** принимают в этой вершине нулевые значения

$x_F = 0$. Формально необходимо выразить оставшиеся $\boldsymbol{m}$ *базисные переменные* x_B через свободные.

Декомпозицией вектора переменных на свободные и базисные $x = \begin{pmatrix} x_F & x_B \end{pmatrix}^T$ ЗЛП (14), (15) можно представить в виде матричных уравнений

$$\begin{cases} A \cdot x = b \\ F = c \cdot x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_B x_B + A_F x_F = b \\ F = c_B x_B + c_F x_F \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_F x_F \\ F = c_B A_B^{-1} b + \left(c_F - c_B A_B^{-1} A_F \right) x_F \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B + A_B^{-1} A_F x_F = A_B^{-1} b \\ F - \left(c_F - c_B A_B^{-1} A_F \right) x_F = c_B A_B^{-1} b. \end{cases} \tag{16}$$

Поскольку свободные переменные в текущей угловой точке равны нулю $x_F = 0$, то правая часть первого выражения (16) позволяет определить является ли решение допустимым $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$, а правая часть второго выражения (16) представляет собой значение целевой функции в этом угле $z = c_B A_B^{-1} b = z_o$.

Последние выражения в координатной форме записи примут вид

$$\begin{cases} x_{Bi} + a_{ij} x_{Fj} = b_i, \qquad i = \overline{1, n} \\ F_{\max} - c_{Fj} x_{Fj} = F_o. \end{cases} \tag{17}$$

Выражения (17) удобно записывать в виде таблицы, где жирная линия соответствуют знаку "=" равно.

Таблица 1

b \ f	x_1	…	x_j	…	x_n	b_i
x_{n+1}	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
…	…	…	…	…	…	…
x_{n+i}	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}	b_i
…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m
$F_{\max}$	$-c_1$	…	$-c_j$	…	$-c_n$	F_o

В ходе решения задачи симплекс-методом, можно установить, не являются ли условия **противоречивыми**, т.е. алгоритм симплекс - метода устанавливает является ли задача разрешимой.

1.8. Критерий оптимальности симплекс - метода

Пусть целевая функция в некоторой вершине многогранника выражается через свободные переменные (16)

$$F_{\max} - \left(c_F - c_B A_B^{-1} A_F\right) x_F = c_B A_B^{-1} b \to \max$$

например, $$F_{\max} - \left(3x_1 + 5x_2 - 2x_5\right) = 12 \to \max, \quad (18)$$

или $$F_{\max} - 3x_1 - 5x_2 + 2x_5 = 12 \to \max,$$

где $x_F = \left(x_1 \quad x_2 \quad x_5\right)^T \equiv \left(0 \quad 0 \quad 0\right)^T$.

Очевидно, что увеличивая переменные x_1 и x_2, которые в данной вершине многогранника нулевые, можно увеличить функцию *F*. Увеличивая же переменную x_5, целевая функция будет только уменьшаться. Поскольку увеличение *F* будет происходить быстрее при изменении x_2, то именно эту свободную переменную следует на очередном этапе сделать базисной.

Таким образом, критерием оптимальности решения ЗЛП симплекс-методом являются условия (для табличного представления):

1. **Задача на max:** если в выражении целевой функции $F_{\max}$ через свободные переменные **отсутствуют отрицательные коэффициенты** при свободных переменных, то решение оптимальное.

2. **Задача на min:** если в выражении функции $Z_{\min}$ через свободные переменные **отсутствуют положительные коэффициенты** при них, то решение оптимальное.

1.9. Алгоритм решения ЗЛП симплекс-методом

1.9.1. Выбор исключаемой базовой переменной

Пусть по выражению целевой функции *F* через свободные переменные было установлено, что переменную x_2 можно увеличивать, а потому ее следует сделать базовой. Значит, одну из базовых следует, наоборот, перевести в свободные. Какую?

Рассмотрим этот вопрос на примере системы ограничений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 &= 8 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 &= 9 \end{aligned} \quad (19)$$

Из (18) следует, что x_2 можно увеличивать, но только до тех пор, пока базовые переменные остаются неотрицательными. Так в системе ограничений (19) базовые переменные $x_3 = 8$; $x_4 = 9$, а свободные равны нулю $x_1 = x_2 = x_5 = 0$. Из первого уравнения видно, что x_2 можно увеличивать до

$x_2 = 4$, но тогда во втором получится, что $x_4 = 9 - 3x_2 = -3$, а значит, решение не будет допустимым. Поэтому *увеличение* x_2 *ограничено минимальным отношением свободного члена к коэффициенту при включаемой свободной переменной*

$$x_2 = \min\left(8/2; 9/3\right) = 3.$$

Это правило учитывает лишь положительные отношения, т.к. в противном случае увеличение включаемой свободной переменной приводило бы только к допустимому увеличению базовой переменной.

Как выполнять пересчет «новой» системы (таблицы) по формулам (16)?

Рассмотрим на примере следующей системы типа (17)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$F_{\max} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0 \tag{21}$$

$$\begin{cases} x_B + Ax_F = b \\ F_{\max} - cx_F = 0 \end{cases}, \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T; \quad x_F = \begin{pmatrix} x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T.$$

Допустим необходимо поменять местами x_2 и x_5. Выполним над выражением (20) преобразования (16)

$$A_B x_B + A_F x_F = b; \qquad \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \\ a_{31} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{22}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a_{32} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12}/a_{22} & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32}/a_{22} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1}A_F = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12}/a_{22} & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32}/a_{22} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \\ a_{31} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{21}a_{12}/a_{22} & -a_{12}/a_{22} \\ a_{21}/a_{22} & 1/a_{22} \\ a_{31} - a_{21}a_{32}/a_{22} & -a_{32}/a_{22} \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12}/a_{22} & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32}/a_{22} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - b_2a_{12}/a_{22} \\ b_2/a_{22} \\ b_3 - b_2a_{32}/a_{22} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Для «нового» базового вектора получим

$$x_B + A_B^{-1}A_F x_F = A_B^{-1}b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} - a_{21}a_{12}/a_{22} & -a_{12}/a_{22} \\ a_{21}/a_{22} & 1/a_{22} \\ a_{31} - a_{21}a_{32}/a_{22} & -a_{32}/a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - b_2 a_{12}/a_{22} \\ b_2/a_{22} \\ b_3 - b_2 a_{32}/a_{22} \end{pmatrix} \qquad (25)$$

В выражение целевой функции

$$F_{\max} + \begin{pmatrix} -c_1 & -c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

подставим x_5 из (25)

$$x_5 = -a_{21}/a_{22}\, x_4 - 1/a_{22} x_2 + b_2/a_{22},$$

получим

$$F_{\max} - c_1 x_4 + c_2\, a_{21}/a_{22}\, x_4 + c_2/a_{22}\, x_2 - c_2 b_2/a_{22} = 0$$

$$F_{\max} - \begin{pmatrix} c_1 - c_2\, a_{21}/a_{22} & -c_2/a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_2\, b_2/a_{22} \qquad (26)$$

Выражения (25) и (26) позволяют перейти к новой симплекс-таблице, в которой $x_B = \begin{pmatrix} x_1 & x_5 & x_3 \end{pmatrix}^T$; $x_F = \begin{pmatrix} x_4 & x_2 \end{pmatrix}^T$.

Теперь можно формализовать алгоритм симплекс-метода.

Рассмотрим решение ЗЛП на максимум.

1.9.2. Алгоритм решения ЗЛП симплекс-методом

1) Переходим к канонической форме, введением вспомогательных положительных переменных.
2) Выбираем базисные переменные
3) Выражаем их через свободные (16). Если решение недопустимое (есть отрицательный свободный член: $\exists i \to x_{B_i} = A_B^{-1} b_i < 0$), то возврат к п. 2.
4) Составляем симплекс таблицу (см. табл.1).
5) По коэффициентам последней строки проверяем текущее решение на оптимальность (см. выше). Если оно оптимально (в строке $F_{\max}$ нет отрицательных элементов), то остановка алгоритма $F_{\max} = F^*_{\max}$.
6) Если в строке $F_{\max}$ *есть отрицательные* элементы, то функцию $F_{\max}$ можно увеличивать. Для этого *по строке $F_{\max}$ выбирают наибольший по модулю отрицательный элемент.* **Столбец**, в котором стоит данный элемент, **называется разрешающим**.
7) Для определения **разрешающей строки** составляют отношения свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца и выбирают минимальное:

$$\min = \left\{ \frac{b_1}{a_{1j}}; \frac{b_2}{a_{2j}}; \ldots \frac{b_i}{a_{ij}}; \ldots \frac{b_m}{a_{mj}} \right\} \text{ (не делят на ноль)}$$

Элемент, стоящий на пересечении разрешающей строки и столбца, **называется разрешающим элементом.**

8) Выполняем переход к «новой» симплекс-таблице, см. (25) и (26):

Пусть *i*-я строка, *j*-й столбец и элемент a_{ij} - разрешающие, тогда

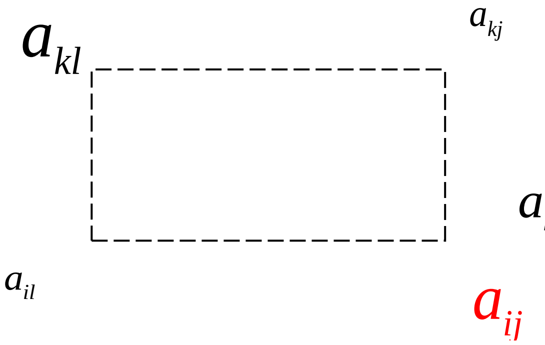
— *Меняем местами переменные* x_j *и* x_{n+i}.

— *Разрешающий элемент заменяем на обратный ему* $a_{ij}^* = 1/a_{ij}$.

— *Остальные элементы разрешающей строки* a_{il} *делим на разрешающий элемент* $a_{il}^* = a_{il}/a_{ij}$.

— *Остальные элементы разрешающего столбца* a_{kj} *делим на разрешающий элемент, взятый с противоположным знаком* $a_{kj}^* = -a_{kj}/a_{ij}$.

— *Все остальные элементы таблицы вычисляем по правилу прямоугольника:*



$$a_{kl}^* = \frac{a_{kl}a_{ij} - a_{il} \cdot a_{kj}}{a_{ij}} = a_{kl} - \frac{a_{il} \cdot a_{kj}}{a_{ij}}.$$

9) Переходим к пункту 5.

Замечания:

1. Аналогично решается задача на минимум, но теперь следует избавляться от *положительных элементов в строке* $Z_{\min}$. *Если в этой строке нет положительных элементов, то задача решена.*
2. Если в разрешающем столбце нет положительных элементов, то нельзя составить необходимые отношения и задача не разрешима.
3. Если первоначальное базисное решение не является допустимым $\left(\text{при } b_i < 0\right)$, то применяется метод искусственного базиса (см. ниже).

Пример: Решить задачу при помощи симплекс – таблиц.

$$\begin{cases} x_1 \le 10 \\ x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 20 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 10 \\ x_2 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 20 \\ x_{1,\dots 5} \ge 0 \end{cases} \quad x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

$$F_{\max} = 3x_1 + 5x_2 \to \max \qquad F_{\max} - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Симплекс – таблица №1

$b \backslash f$	x_1	x_2	b_i
x_3	1	0	10
x_4	0	1	8
x_5	1	2	20
$F_{\max}$	-3	-5	0

$$F_{\max}(0;0) = 0; \qquad x = (0;0;10;8;20)^T$$

$$\min = \left\{\frac{8}{1}; \frac{20}{2}\right\} = 8$$

Симплекс – таблица №2

$b \backslash f$	x_1	x_4	b_i
x_3	1	0	10
x_2	0	1	8
x_5	1	-2	4
$F_{\max}$	-3	5	40

$$F_{\max}(0;8) = 40; \qquad x = (0;8;10;0;4)^T$$

$$\min = \left\{\frac{10}{1}; \frac{4}{1}\right\} = 4$$

Симплекс – таблица №3

$b \backslash f$	x_5	x_4	b_i
x_3	-1	2	6
x_2	0	1	8
x_1	1	-2	4
$F_{\max}$	3	-1	52

$$F_{\max}(4;8) = 52; \qquad x = (4;8;6;0;0)^T$$

$$\min = \left\{\frac{6}{2}; \frac{8}{1}\right\} = 3$$

Симплекс – таблица №4

$b \backslash f$	x_5	x_3	b_i
x_4	-1/2	1/2	3
x_2	1/2	-1/2	5
x_1	0	1	10
$F_{\max}$	5/2	1/2	55

$$x^* = (10;5;0;3;0)^T \qquad F^*_{\max}(10;5) = 55$$

Так как в строке $F_{\max}$ нет отрицательных коэффициентов, то последнее решение является оптимальным.

Задания для решения в аудитории

1. При производстве двух видов краски *A* и *B* предприятием используется три компонента. Расход каждого вида компонента на единицу продукции и запасы компонентов приведены в таблице Прибыль от производства краски вида *A* - 3 усл. ед., краски вида *B* – 2 усл. ед. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, решить задачу симплекс-методом.

Компоненты	Расход компонента на единицу продукции		Запасы компонентов
	A	B	
1	1	2	6
2	2	1	8
3	0	1	2
Прибыль	3	2	

2. При производстве двух видов продукции используются три вида сырья. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимум прибыли и решить задачу симплекс-методом. Данные приведены в таблице:

Виды сырья	Расход сырья на единицу продукции		Запасы сырья
	A	B	
1	2	1	20
2	1	1	12
3	1	3	30
Прибыль	40	50	

1.10. Метод искусственного базиса (М - метод)

Обычно при решении задачи ЛП на минимум, после приведения системы ограничений к каноническому виду нельзя сразу получить допустимое базисное решение (т.е. если знак неравенства ≥ или $b_i < 0$), то применяют метод искусственного базиса. Он заключается в следующем:

1) вводят искусственные неотрицательные переменные $y_1, y_2, ..., y_m$ и прибавляют их к левым частям уравнений так, чтобы из них можно было выделить базис.

2) вводят новую целевую функцию с дополнительным слагаемым

$$Z_{\min} = c^T x + M \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_m) \to \min, \text{ для задачи на min, или}$$

$$F_{\max} = c^T x - M \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_m) \to \max, \text{ для задачи на max,}$$

где $M >> 0$ - произвольное большое число. При оптимизации дополнительное М-слагаемое является наиболее значимым, что требует первоочередного перевода искусственных переменных из разряда базисных в свободные. Целевую функцию при этом принято записывать в две строки - основная и дополнительная (М-строка) ее составляющие:

$$\begin{aligned} &Z_{\min} - c^T x - \\ &\quad - M \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_m) = 0; \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} &F_{\max} - c^T x + \\ &\quad + M \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_m) = 0; \end{aligned}$$

3) решают задачу по М-строке, при этом искусственные переменные $y_1, y_2, ..., y_m$ выводят из базиса и делают их свободными. Обратно в базис их не возвращают, поэтому соответствующие столбцы симплекс - таблицы вычеркивают и дальше не рассматривают.

4) Все элементы таблицы заполняются обычным образом.

5) после перевода всех искусственных переменных $y_1, y_2, ..., y_m$ в свободные, получаем первое базисное решение. Все элементы в М-строке обращаются в ноль и ее отбрасывают.

6) далее задачу решают обычным симплекс-методом.

Пример:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 8 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 26 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \qquad z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$

Перейдем к каноническому виду, вводя вспомогательные переменные:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 26 \\ x_{1,2,3,4} \geq 0 \end{cases} \qquad z - 2x_1 - 3x_2 = 0;$$

Базис явно не выделяется, поэтому введем искусственные переменные:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 + y_2 = 26 \\ x_{1-4} \geq 0 \\ y_{1,2} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 8 - (x_1 + x_2 - x_3) \\ y_2 = 26 - (2x_1 + 4x_2 - x_4) \end{cases}$$

$$y_1 + y_2 = 34 - (3x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4)$$

Составим новую целевую функцию:

$$Z = z + M \cdot (y_1 + y_2) = 2x_1 + 3x_2 + M\left(34 - (3x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4)\right);$$

$$Z - (2x_1 + 3x_2) +$$

$$+M(3x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4) = M \cdot 34; \qquad Z \to \min$$

Составим симплекс-таблицу 1.

b \ f	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
y_1	1	1	-1	0	8
y_2	2	4	0	-1	26
z	-2	-3	0	0	0
M	3	5	-1	-1	34

Решение на min не оптимально, поскольку в М-строке есть положительные элементы. Выбираем разрешающим столбец с наибольшим положительным числом.

Разрешающую строку выбираем по отношениям: $\min = \left\{ \frac{8}{1}; \frac{26}{4} \right\} = \frac{26}{4}$

Переходим к симплекс - таблице №2. Столбец, содержащий искусственную переменную, вычеркиваем.

b \ f	x_1	y_2	x_3	x_4	b_i
y_1	2/4	-1/4	-1	1/4	6/4
x_2	2/4	1/4	0	-1/4	26/4
z	-2/4	3/4	0	-3/4	78/4
M	2/4	-5/4	-1	1/4	6/4

$$\min = \left\{ \frac{6}{2}; \frac{26}{2} \right\} = 3$$

Переходим к симплекс – таблице №3: Столбец, содержащий искусственную переменную, вычеркиваем.

f \ b	y_1	x_3	x_4	b_i
x_1	2	-2	1/2	3
x_2	-1	1	0	5
z	1	-1	-1/2	21
~~M~~	~~-1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~

Так как в М-строке получили все нули, то вычеркиваем М-строку. Мы получили ***первое базисное решение***:

f \ b	x_3	x_4	b_i
x_1	-2	1/2	3
x_2	1	0	5
Z	-1	-1/2	21

Так как задача решается на минимум, а в строке z все коэффициенты отрицательные, то ***это базисное решение является и оптимальным***:

$$x^* = (3;5;0;0); \qquad Z^*_{\min} - x_3 - 1/2\,x_4 = 21.$$

Альтернатива

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 26 \\ x_{1,2,3,4} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + 8 \\ 2x_1 + 4x_2 = x_4 + 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-4)x_1 = x_4 + 26 - 4(x_3+8) \\ (4-2)x_2 = x_4 + 26 - 2(x_3+8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 - 0,5x_4 + 3 \\ x_2 = -x_3 + 0,5x_4 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Задания для решения в аудитории

1. Производственному участку может быть запланировано к изготовлению на определённый плановый период времени два вида изделий: A и B . На производство единицы изделия A оборудование первого типа используется *1*час, оборудование второго типа - *4* часа. На производство единицы изделия B оборудование первого типа используется *2* часа, оборудование второго типа - *2* часа.

Фонд полезного времени первого типа оборудования составляет *120* часов, второго типа оборудования – *240* часов. Отпускная цена единицы изделия A составляет *4* руб., а изделия B - *6* руб.

Спланировать выпуск изделий A и B при условии, что план должен быть выполнен в стоимостном выражении на сумму не менее *320* руб. и оборудование первого типа должно быть загружено минимально.

2. Симпатичная девушка узнала из дамского журнала, что для того чтобы волосы стали более шелковистыми, организм должен получать ежедневно не менее 40 г питательного вещества А, не менее 4 г питательного вещества Б и не менее 30 г питательного вещества В. Девушка знает, что в 1 кг яблок содержится 10 г вещества Б и 50 г вещества В, а в 1 кг огурцов содержится 40 г вещества А и по 20 г веществ Б и В. Цена яблок – 60 руб. за 1 кг, цена огурцов – 50 руб. за 1 кг. Требуется помочь девушке составить рацион, помогающий увеличить шелковистость волос и при этом имеющий наименьшую стоимость.

1.11. Двойственность в задачах линейного программирования

Каждой задаче линейного программирования соответствует двойственная или сопряженная задача.

Задача 1 (исходная)	Задача 2 (двойственная)
$F_{\max} = c^T x$ $F_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$	$Z_{\min} = b^T y$ $Z_{\min} = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$
$Ax \le b$ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_{1\ldots n} \ge 0 \end{cases}$ Для П1 составить такой план выпуска продукции $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, при котором прибыль от реализации *F* будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не будет превосходить имеющиеся запасы b_i.	$A^T y \ge c$ $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_m \\ y_{1\ldots m} \ge 0 \end{cases}$ Найти такой набор цен $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$ на ресурсы, при котором общие затраты на их покупку Z для П2 будут минимальными. При условии, что выручка от продажи ресурсов для П1 будет не меньше выручки от реализации готовой продукции.

Нашелся покупатель, который хочет купить все ресурсы b, по минимально возможной цене. Предприятию есть смысл продавать, если цена ресурсов, затрачиваемых на производство каждого товара, будет не меньше цены реализации этого товара.

$$I\begin{cases} Ax \le b \\ F_{\max} = c^T x \end{cases} \qquad \begin{cases} y^T A \ge c^T \\ Z_{\min} = y^T b \end{cases} \Rightarrow II\begin{cases} A^T y \ge c \\ Z_{\min} = b^T y \to \min \end{cases} \tag{27}$$

Свойства двойственных задач:

1. В первой задаче ищется $\max$ целевой функции, а в другой $\min$.
2. Коэффициенты при переменных целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи.
3. Каждая из задач задана в стандартной форме.
4. Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений являются транспонированными друг другу.

5. Число неравенств m в первой задаче, совпадает с числом переменных в другой задаче.
6. Условия неотрицательных переменных присутствуют в обеих задачах.

Алгоритм составления двойственной задачи:

1. Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному смыслу. Для этого неравенства, в которых данные требования не выполняются, умножают на (-1).
2. Составить расширенную матрицу исходной задачи: $A_1 = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c^T & F_{\max} \end{array}\right)$;
3. Транспонировать полученную матрицу $A_2 = \left(\begin{array}{c|c} A^T & c \\ \hline b^T & Z_{\min} \end{array}\right)$;
4. Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы и условии неотрицательных переменных.

Пример 1: Составить двойственную задачу

Исходная задача:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} Ax \le b; \\ F_{\max} = c^T x \end{array} \quad \Rightarrow A_1 = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c^T & F_{\max} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 18 \\ 2 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 21 \\ \hline 2 & 3 & F_{\max} \end{array}\right)$$

$$F_{\max} = 2x_1 + 3x_2$$

Двойственная задача:

$$A_2 = \left(\begin{array}{c|c} A^T & c \\ \hline b^T & Z_{\min} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 18 & 16 & 5 & 21 & Z_{\min} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 3 \\ y_{1,2,3,4} \ge 0 \end{cases}$$

$$Z_{\min} = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4$$

Основное неравенство (первая теорема) теории двойственности

Для любых допустимых решений $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$ справедливо неравенство

$$F_{\max}(x) \le Z_{\min}(y). \qquad (28)$$

Оно получается, если умножить первые строки систем (27) на y^T слева и на x справа соответственно

$$y^T Ax \le y^T b = Z_{\min}; \quad y^T Ax \ge c^T x = F_{\max}; \Rightarrow F_{\max}(x) \le y^T Ax \le Z_{\min}. \qquad (29)$$

Теорема 1. Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их целевых функций равны, т.е.

$$Z_{\min}(y^*) = y^{*T} Ax^* = F_{\max}(x^*) \quad \text{или} \quad Z_{\min}(y^*) = y^{*T} b = c^T x^* = F_{\max}(x^*). \qquad (30)$$

Если целевая функция одной из задач неограниченна, то условия другой задачи противоречивы, следовательно, оптимального плана нет.

Вторая теорема двойственности (о соответствии переменных)

Назовем исходные векторы x_n и y_m размерностей n и m соответственно *основными*. Введением *дополнительных* неотрицательных векторов переменных $\tilde{x}_m$ и $\tilde{y}_n$ размерностей m и n соответственно, приведем системы ограничений задач (27) к каноническому виду

$$A_{m\times n} x_n \le b_m; \quad y_m^T A_{m\times n} \ge c_n^T; \qquad (31)$$

$$A_{m\times n} x_n + \tilde{x}_m = b_m; \quad y_m^T A_{m\times n} - \tilde{y}_n^T = c_n^T.$$

Умножим выражения (31) на y^T слева и на x справа соответственно

$$y^T Ax + y^T \tilde{x} = y^T b = Z_{\min}; \qquad y^T Ax - \tilde{y}^T x = c^T x = F_{\max}. \qquad (32)$$

Поскольку эти выражения справедливы для любых допустимых решений, то в силу (30) для оптимальных решений имеет место равенство скалярных произведений

$$y^{*T} \tilde{x}^* = -\tilde{y}^{*T} x^*,$$

которое может быть выполнено, для неотрицательных по определению компонент векторов, только при равенстве их нулю

$$y_m^{*T} \tilde{x}_m^* = \tilde{y}_n^{*T} x_n^* = 0. \qquad (33)$$

Справедливы также выражения:

$$Z^*_{\min} = F^*_{\max} = y^{*T} Ax^*. \quad . \qquad (34)$$

Теорема 2. Между переменными существует соответствие

$$\dim(x) = \dim(\tilde{y}) = n; \qquad \dim(y) = \dim(\tilde{x}) = m.$$

Переменные исходной задачи I											
Первоначальные						Дополнительные					
x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+i}	…	x_{n+m}
$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$ **(6.14)**
y_{m+1}	y_{m+2}	…	y_{m+j}	…	y_{m+n}	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
Дополнительные						Первоначальные					
Переменные двойственной задачи II											

При этом (см.(33)) *положительным компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи и наоборот.*

На основании (32) и (33) эту теорему можно сформулировать несколько иначе.

Коэффициентами в выражениях для оптимальных целевых функций являются:

для $F^*_{\max}(x_F)$ - значения базисного вектора $-y^*_B$

$$F^*_{\max}(x_F) = y^{*T}Ax^* - y^T_B x_F = c^T x_B, \tag{35}$$

для $Z^*_{\min}(y_F)$ - значения базисного вектора x^*_B

$$Z^*_{\min}(y_F) = y^{*T}Ax^* + y^T_F x_B = y^T_B b. \tag{36}$$

Решить задачу примера 1.

Введением векторов дополнительных неотрицательных переменных $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ приведем задачи к каноническому виду (31)

$$\begin{cases} \tilde{x} + Ax = b \\ F_{\max} - c^T x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{y}^T = y^T A - c^T \\ Z_{\min} = y^T b \end{cases} \tag{37}$$

Здесь $\dim(A) = m \times n = 4 \times 2$; $\dim(x) = \dim(\tilde{y}) = n = 2$; $\dim(y) = \dim(\tilde{x}) = m = 4$.

Исходная задача в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=18 \\ 2x_1+x_2+x_4=16 \\ x_2+x_5=5 \\ 3x_1+x_6=21 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1+3x_2 \\ 2x_1+x_2 \\ x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \\ 5 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$F_{\max}=2x_1+3x_2 \qquad F_{\max}-2x_1-3x_2=0$$

Двойственная задача в развернутом виде:

$$\begin{cases} y_1+2y_2+3y_4-y_5=2 \\ 3y_1+y_2+y_3-y_6=3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1+2y_2+3y_4 \\ 3y_1+y_2+y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Z_{\min}=18y_1+16y_2+5y_3+21y_4 \qquad Z_{\min}=18y_1+16y_2+5y_3+21y_4$$

Учитывая соответствие между переменными, на основании (37)

$$\begin{array}{cc} x^T=(x_1\ x_2); & \tilde{x}^T=(x_3\ x_4\ x_5\ x_6) \\ \updownarrow\ \ \updownarrow & \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \\ \tilde{y}^T=(y_5\ y_6); & y^T=(y_1\ y_2\ y_3\ y_4) \end{array}$$

составим исходную симплекс-таблицу. Здесь, по-прежнему, толстые линии соответствуют знаку "=" равно.

Выполняя обычные итерации симплекс-метода, получим оптимальные решения сразу двух задач.

b \ f		y_5	y_6	$Z_{\min}$
	f \ b	x_1	x_2	b_i
y_1	x_3	1	3	18
y_2	x_4	2	1	16
y_3	x_5	0	1	5
y_4	x_6	3	0	21
$F_{\max}$	$-c_j$	-2	-3	0

b \ f		y_5	y_3	$Z_{\min}$
	f \ b	x_1	x_5	b_i
y_1	x_3	1	-3	3
y_2	x_4	2	-1	11
y_6	x_2	0	1	5
y_4	x_6	3	0	21
$F_{\max}$	$-c_j$	-2	3	15

b \ f		y_1	y_3	$Z_{\min}$
	f \ b	x_3	x_5	b_i
y_5	x_1	1	-3	3
y_2	x_4	-2	5	5
y_6	x_2	0	1	5
y_4	x_6	-3	9	12
$F_{\max}$	$-c_j$	2	-3	21

b \ f		y_1	y_2	$Z_{\min}$
	f \ b	x_3	x_4	b_i
y_5	x_1	-1/5	3/5	6
y_3	x_5	-2/5	1/5	1
y_6	x_2	2/5	-1/5	4
y_4	x_6	3/5	-9/5	3
$F_{\max}$	$-c_j$	4/5	3/5	24

$$\begin{pmatrix} x^* \\ \tilde{x}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_B^* \\ x_F^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_6 \\ \hline x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y^* \\ \tilde{y}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \hline y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_B^* \\ y_F^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \hline y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y^{*T}\tilde{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0; \qquad \tilde{y}^{*T}x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

В соответствии с (30)

$$Z^*_{\min} = F^*_{\max} = y^{*T}Ax^* = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 24;$$

$$Z_{\min}\left(y^*\right) = y^{*T}b = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \\ 5 \\ 21 \end{pmatrix} = 24; \quad F_{\max}\left(x^*\right) = c^T x^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 24.$$

В соответствии с (35), (36) и последней симплекс-таблицей

$$F_{\max}^{*}(x_F) = y^{*T}Ax^{*} - y_B^T x_F = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4;$$

$$Z^{*}_{\min}(y_F) = y^{*T}Ax^{*} + y_F^T x_B = 24 + y_3 + 3y_4 + 6y_5 + 4y_6.$$

1.12. Экономические приложения двойственных оценок

*Компоненты оптимального решения двойственной задачи называются **двойственными оценками** исходной задачи.* Академик Л.В.Канторович назвал их ***объективно обусловленными оценками.***

Для выяснения смысла этих оценок вернемся к задаче I об использовании ресурсов и двойственной ей задаче II (см. примеры 1 и 2). Компоненты оптимальных решений этих задач представлены в таблице.

Компоненты оптимального решения исходной задачи I					
Число единиц продукции		Остатки ресурсов, единиц			
P_1	P_2	S_1	S_2	S_3	S_4
$x_1^* = 6$	$x_2^* = 4$	$x_3^* = 0$	$x_4^* = 0$	$x_5^* = 1$	$x_6^* = 3$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$y_5^* = 0$	$y_6^* = 0$	$y_1^* = 4/5$	$y_2^* = 3/5$	$y_3^* = 0$	$y_4^* = 0$
Превышение затрат на ресурсы над ценой реализации		Объективно обусловленные оценки ресурсов (условные цены ресурсов)			
Компоненты оптимального решения двойственной задачи II					

Дополнительные переменные исходной задачи I x_3, x_4, x_5, x_6, согласно выражению (31), определяют разность между запасами b_i, ресурсов S_3, S_4, S_5, S_6 и их потреблением, т.е. выражают *остатки ресурсов.* Дополнительные переменные двойственной задач II y_5, y_6, в соответствии с (31), есть разность между затратами на ресурсы для производства из них единицы продукции и ценами c_j на готовую продукцию P_1 и P_2, т.е. выражают *превышение затрат над ценой.*

Ресурсы S_1, S_2 по оптимальному плану полностью использованы ($x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$), они дефицитные, поэтому оценки этих ресурсов не равны нулю ($y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$). Ресурсы S_3, S_4 не полностью используются в оптимальном плане ($x_5^* = 1$, $x_6^* = 3$), они имеются в избытке, поэтому объективно обусловленные оценки этих ресурсов нулевые ($y_3^* = 0, y_4^* = 0$).

Таким образом, *объективно обусловленные оценки ресурсов определяют степень дефицитности ресурсов: по оптимальному плану производства дефицитные (т.е. полностью используемые) ресурсы получают ненулевые оценки, а недефицитные — нулевые оценки.*

По оптимальному плану в исходной задаче следует производить оба вида продукции ($x_1^* = 6$, $x_2^* = 4$), значит разность между стоимостью ресурсов, затрачиваемых на их производство, и стоимостью реализации готовых изделий равна нулю ($y_5^* = 0$, $y_6^* = 0$). Производить такие товары выгодно.

Итак, *в оптимальный план производства могут попасть только неубыточные в производстве виды продукции* (о прибыли речь вообще не идет).

Объективно обусловленные оценки ресурсов позволяют также оценить изменения объема выручки, вызванные малыми изменениями запасов ресурсов.

Это утверждение основано на следующих соображениях. Придадим малые приращения имеющимся запасам ресурсов Δb_i, такие малые, чтобы оптимум в ОДР не перешел в другую угловую точку. Тогда в соответствии с (30)

$$y^{*T} \cdot \Delta b = \Delta F_{\max}\left(x^*\right),$$

откуда в пределе получим

$$y_i^* = \lim_{\Delta b_i \to 0} \frac{\Delta F_{\max}\left(x^*\right)}{\Delta b_i} = \frac{\partial F_{\max}\left(x^*\right)}{\partial b_i}. \qquad (38)$$

Объективно обусловленные оценки ресурсов показывают, на сколько денежных единиц изменится максимальная прибыль (выручка) от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на одну единицу.

Пример 1. Для рассматриваемой задачи были получены объективно обусловленные оценки ресурсов: $y_1^* = 4/5$, $y_2^* = 3/5$, $y_3^* = 0$, $y_4^* = 0$. В соответствии с (38), при увеличении (уменьшении) запаса ресурсов S_1 или S_2 на 1 единицу максимальная прибыль (выручка) увеличится (уменьшится) соответственно на 4/5 и 3/5 руб., а при изменении запаса ресурсов S_3 или S_4 — не изменится.

Двойственные оценки могут служить инструментом анализа и принятия правильных решений в условиях постоянно меняющегося производства. Так, например, *с помощью объективно обусловленных оценок ресурсов возможно сопоставление оптимальных условных затрат и результатов производства.*

Пример 2. Допустим, что в рассматриваемой задаче I, для которой был получен оптимальный план выпуска продукции P_1 и P_2, появилась возможность выпуска еще одного вида продукции P_3. Затраты ресурсов на единицу продукции P_3 и цена реализации составляют:

$$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \; c_3 = 3.$$

Определить рентабельно ли производство P_3? Если нет, то какой должна быть прибыль от единицы продукции P_3 (цена), чтобы ее производство было рентабельным?

Решение. Можно включить в условия задачи продукцию P_3 и заново решить задачу, однако это потребует новых затрат (трудовых, стоимостных, временных). Но необходимости в этом нет, так как известны объективно обусловленные оценки ресурсов. Действительно, сопоставим дополнительные затраты на ресурсы в расчете на единицу продукции P_3 с ценой ее реализации. Затраты

$$a_{13}y_1^* + a_{23}y_2^* + a_{33}y_3^* + a_{43}y_4^* = 3 \cdot 4/5 + 2 \cdot 3/5 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 3{,}6 \text{ руб.},$$

больше цены продукции $c_3 = 3$ руб., поэтому выпуск продукции P_3 не следует включать в план выпуска, и необходимость повторного решения задачи в изменившихся условиях отпадает. А чтобы производство продукции P_3 стало рентабельным, очевидно, ее цена должна составлять не менее 3,6 руб.

Объективно обусловленные оценки ресурсов позволяют судить об эффекте не любых, а лишь сравнительно небольших изменений ресурсов. При резких изменениях сами оценки могут стать другими, что приведет к невозможности их использования для анализа эффективности производства.

Пример 3. Для рассматриваемой задачи найти интервалы устойчивости (неизменности) двойственных оценок по отношению к изменениям запасов ресурсов каждого вида. Изменятся ли эти оценки, если увеличить запасы каждого из ресурсов на 10 единиц: а) в отдельности; б) одновременно? Найти соответствующее изменение максимальной прибыли (выручки) от реализации продукции.

Двойственные оценки могут также использоваться для оценки устойчивости оптимального решения в случае изменений, как запасов ресурсов, так и стоимости реализации готовых изделий.

Двойственные оценки могут также использоваться для оценки устойчивости оптимального решения в случае изменений, как запасов ресурсов, так и стоимости реализации готовых изделий.

Этот подход основан на использовании выражений (31)

$$y^T(b + \Delta b) = Z + \Delta Z; \qquad (\Delta c + c)^T x = F + \Delta F. \tag{39}$$

Необходимо оценить допустимые изменения векторов Δb и Δc, при которых оптимум будет оставаться в заданном углу ОДР. Очевидно, что в этом случае векторы x и y не должны изменять свою структуру в том смысле, что не должен изменяться состав базисной и свободной их составляющих. Последнее возможно при условии неотрицательности векторов x и y, если в выражении (39) базисные составляющие выразить через свободные [1].

Задания для решения в аудитории

1. Для задачи, состоящей в определении максимального значения функции $Z = 2x_1 + 7x_2$ при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ \quad x_1 + \quad x_2 \le 8 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

составить двойственную задачу и найти решение обеих задач геометрически.

2. Для производства трех видов изделий *A*, *B* и *C* используется три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в количестве, соответственно не большем 180, 210 и 244 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в таблице.

Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается ее максимальная стоимость, и оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции. Оценки, приписываемые каждому из видов сырья, должны быть такими, чтобы оценка всего используемого сырья была минимальной, а суммарная оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида,– не меньше цены единицы продукции данного вида.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	*B*	C
I II III	4 3 1	2 1 2	1 3 5
Цена единицы продукции (руб.)	10	14	12

2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

2.1. Общая постановка задачи

Найти объемы перевозок для каждой пары поставщик - потребитель так, чтобы:

1. Мощности всех поставщиков были реализованы.
2. Удовлетворить все потребности потребителей.
3. Суммарные затраты на перевозку были минимальными.

Задача:

В 3-х пунктах отправления A_1, A_2, A_3, сосредоточен груз в количестве a_1, a_2, a_3. Этот груз следует доставить в каждый из четырех пунктов B_1, B_2, B_3, B_4 в количестве b_1, b_2, b_3, b_4. Стоимость перевозок c_{ij} единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения задана для всех комбинаций. Определить такой план перевозок x_{ij}, чтобы их стоимость была минимальной.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	c_{14} x_{14}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	c_{24} x_{24}	a_2
A_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	c_{34} x_{34}	a_3
Потребности	b_1	b_2	b_3	b_4	

c_{ij} - стоимость перевозок единицы продукции из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

x_{ij} - количество единиц груза, отправленного из i-го пункта в j-й.

Определение. Если объем суммарных запасов груза равен суммарному объему потребностей в этих грузах $\sum a_i = \sum b_j$, то ТЗ является **закрытой.**

Если же эти суммы не равны, то ТЗ называется **открытой** и в этом случае следует вводить ложный пункт отправления или назначения с нулевыми тарифами.

Для закрытой ТЗ система ограничений имеет вид:

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a_1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a_3 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4 \\
x_{ij} \geq 0
\end{cases} \tag{40}
$$

$$
Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{34}x_{34} = c^T x \to \min \tag{41}
$$

$$
y^T\left(b + \Delta b\right) = Z + \Delta Z; \qquad \left(\Delta c + c\right)^T x = F + \Delta F. \tag{42}
$$

Система ограничений (40) содержит $m+n$ уравнений и $m \cdot n$ переменных, где ***m* – *число поставщиков***, а ***n* - *число потребителей***. Эту систему можно представить в матричной форме

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4
\end{pmatrix} \tag{43}
$$

Матрица ограничений имеет размерность $\left(m+n\right) \times mn = 7 \times 12$.

Данную задачу можно решить симплекс методом, но он оказывается слишком громоздким, поэтому требуется специальный метод, учитывающий следующие **особенности модели ТЗ**:

1. Система ограничений - есть система уравнений.

2. Коэффициенты при переменных в системе ограничений равны 1 или 0.

3. Каждая переменная входит в систему ограничений дважды.

4. Одно уравнение системы ограничений (43) транспортной задачи является следствием остальных и его можно исключить.

5. Последнее утверждение основано на том, что сумма первых m=3 строк матрицы (43) равна сумме оставшихся n=4 строк, а значит ранг матрицы ограничений $r = m + n - 1$.

Поскольку ранг матрицы ограничений не максимально возможный, то ТЗ имеет множество допустимых решений.

Определение. План перевозок (решение ТЗ) называется **опорным (базисным)** если все переменные неотрицательны

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

В соответствие значению ранга системы число базисных переменных закрытой ТЗ равно

$$\dim(x_B) = m + n - 1.$$

Остальные переменные являются свободными (нулевыми). Их количество

$$\dim(x_F) = mn - (m + n - 1).$$

Определение. План перевозок, обращающий в минимум суммарные транспортные издержки, называется **оптимальным.**

Решение транспортной задачи разбивается на 3 этапа:

1. Определение первоначального опорного решения.
2. Формулировка критерия оптимальности решения.
3. Построение последовательных итераций, т.е. приближение к оптимальному решению.

2.2. Методы построения первоначального опорного плана

2.2.1. Метод северо-западного угла

Тарифы не учитываются. Работа начинается с левой верхней клетки таблицы.

Возможны 2 случая:

1) $\min(a_1; b_1) = a_1$ тогда $x_{11} = a_1 \Rightarrow x_{12} = x_{13} = x_{14} = 0$

Для b_1 остаток равен: $b_1 - a_1$

2) $\min(a_1; b_1) = b_1$ тогда $x_{11} = b_1 \Rightarrow x_{21} = x_{31} = 0$

Для a_1 остаток равен: $a_1 - b_1$ единиц груза.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	**5** 0	7 0	11 0	100
A_2	1	4	6	3	130
A_3	5	8	12	7	170
Потребности	150	120	80	50	400

$$\min(100\,;150)=100$$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	5 0	7 0	11 0	~~100~~
A_2	1 50	4	6	3	130
A_3	5 0	8	12	7	170
Потребности	~~150~~ 50	120	80	50	400

$$\min(130\,;50)=50$$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	5 0	7 0	11 0	~~100~~
A_2	1 50	4 80	6 0	3 0	~~130~~ 80
A_3	5 0	8	12	7	170
Потребности	~~150~~ ~~50~~	120	80	50	400

$$\min(80\,;120)=80$$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	5 0	7 0	11 0	~~100~~
A_2	1 50	4 80	6 0	3 0	~~130~~ ~~80~~
A_3	5 0	8 40	12	7	170
Потребности	~~150~~ ~~50~~	~~120~~ 40	80	50	400

$$\min(170\,;40)=40$$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	5 0	7 0	11 0	~~100~~
A_2	1 50	4 80	6 0	3 0	~~130~~ ~~80~~
A_3	5 0	8 40	12 80	7	~~170~~ 130
Потребности	~~150~~ ~~50~~	~~120~~ ~~40~~	80	50	400

$\min(130\,;80)=80$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	5 0	7 0	11 0	~~100~~
A_2	1 50	4 80	6 0	3 0	~~130~~ ~~80~~
A_3	5 0	8 40	12 80	7 50	~~170~~ ~~130~~ 50
Потребности	~~150~~ ~~50~~	~~120~~ ~~40~~	~~80~~	50	400

$\min(50\,;50)=50$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	5 0	7 0	11 0	~~100~~
A_2	1 50	4 80	6 0	3 0	~~130~~ ~~80~~
A_3	5 0	8 40	12 80	7 50	~~170~~ ~~130~~ ~~50~~
Потребности	~~150~~ ~~50~~	~~120~~ ~~40~~	~~80~~	~~50~~	400

Число заполненных (базисных) клеток в таблице должно быть равно рангу системы $m+n-1=3+4-1=6$.

Подсчитаем стоимость полученного решения, используя формулу:

$$Z=c^T x=\sum_{i,j} c_{i\,j}\cdot x_{i\,j} \qquad (44)$$

$$Z_{сзу}=100\cdot 3+50\cdot 1+80\cdot 4+40\cdot 8+80\cdot 12+50\cdot 7=2300.$$

2.2.2. Метод минимального элемента

1. При составлении опорного плана перевозок методом min элемента в таблице заполняется клетка, которая соответствует минимальному тарифу, далее поступают как в предыдущем примере.
2. Затем заполняется клетка с min тарифом из оставшихся и так далее.
3. Если на определенном шаге встречается несколько клеток с равными минимальными тарифами, то выбираем ту клетку, куда можно перевезти больше продукции.
4. Если и таких клеток несколько, то выбираем ту, у которой меньше индекс i.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3	5	7	11	100
A_2	1 130	4 0	6 0	3 0	~~130~~
A_3	5	8	12	7	170
Потребности	~~150~~ 20	120	80	50	400

$\min(130\,;150)=130$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 20	5	7	11	~~100~~ 80
A_2	1 130	4 0	6 0	3 0	~~130~~
A_3	5 0	8	12	7	170
Потребности	~~150~~ ~~20~~	120	80	50	400

$\min(100\,;20)=20$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 20	5 80	7 0	11 0	~~100~~ ~~80~~
A_2	1 130	4 0	6 0	3 0	~~130~~
A_3	5 0	8	12	7	170
Потребности	~~150~~ ~~20~~	~~120~~ 40	80	50	400

$\min(80\,;120)=80$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 20	5 80	7 0	11 0	~~100~~ ~~80~~
A_2	1 130	4 0	6 0	3 0	~~130~~
A_3	5 0	8	12	7 50	~~170~~ 120
Потребности	~~150~~ ~~20~~	~~120~~ 40	80	~~50~~	400

$\min(170\,;50)=50$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 20	5 80	7 0	11 0	~~100~~ ~~80~~
A_2	1 130	4 0	6 0	3 0	~~130~~
A_3	5 0	8 40	12	7 50	~~170~~ ~~120~~ 80
Потребности	~~150~~ ~~20~~	~~120~~ ~~40~~	80	~~50~~	400

$\min(120\,;40)=40$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 20	5 80	7 0	11 0	~~100~~ ~~80~~
A_2	1 130	4 0	6 0	3 0	~~130~~
A_3	5 0	8 40	12 80	7 50	~~170~~ ~~120~~ ~~80~~
Потребности	~~150~~ ~~20~~	~~120~~ ~~40~~	~~80~~	~~50~~	400

$$n+m-1=6$$
$$Z_{мэ}=20\cdot 3+80\cdot 5+130\cdot 1+40\cdot 8+80\cdot 12+50\cdot 7=2220$$

2.2.3. Метод аппроксимации Фогеля

Для каждой строки и столбца вычисляют величины $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$. Величина α_i получается как разность между **минимальными тарифами** i-й строки (если в строке два равных **min** тарифа, то разность равна 0). β_j вычисляется аналогично, но в столбце.

После заполнения строки и столбца разностей выбирают **наибольшую разность.** Возможны два случая:

1. Имеется **одна наибольшая разность:** заполняют клетку строки или столбца с этой наибольшей разностью, содержащей **min** тариф, как в предыдущем методе. Далее пересчитывают разности для оставшихся клеток и т. д.
2. Имеется **несколько наибольших разностей.** Тогда заполняется клетка по принципу: наименьший элемент в столбце должен быть наименьшим и в строке или предпочтение отдается строке.

$$\alpha_1 = |3-5| = 2; \quad \beta_1 = |1-3| = 2;$$

$$\alpha_2 = |1-3| = 2; \quad \beta_2 = |4-5| = 1;$$

$$\alpha_3 = |5-7| = 2; \quad \beta_3 = |6-7| = 1; \quad \beta_4 = |3-7| = 4.$$

β_j / α_i		2	1	1	4	
	B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
2	A_1	3	5	7	11 0	100
2	A_2	1	4	6	3 50	~~130~~ 80
2	A_3	5	8	12	7 0	170
	Потребности	150	120	80	~~50~~	400

$\min(130; 50) = 50$

β_j / α_i		2	1	1	4	
	B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
~~2~~,2	A_1	3	5	7	11 0	100
~~2~~,3	A_2	1 80	4 0	6 0	3 50	~~130~~ ~~80~~
~~2~~,3	A_3	5	8	12	7 0	170
	Потребности	~~150~~ 70	120	80	~~50~~	400

$\min(80; 150) = 80$

β_j / α_i		~~2~~,2	~~1~~,3	~~1~~,5	4	
	B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
~~2~~,2	A_1	3	5	7 80	11 0	~~100~~ 20
~~2~~,3	A_2	1 80	4 0	6 0	3 50	~~130~~ ~~80~~
~~2~~,3	A_3	5	8	12 0	7 0	170
	Потребности	~~150~~ 70	120	~~80~~	~~50~~	400

$\min(100;80)=80$

β_j / α_i		~~2~~,2	~~1~~,3	~~1~~,5	4	
	B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
~~2~~,~~2~~,2	A_1	3 0	5	7 80	11 0	~~100~~ 20
~~2~~,3	A_2	1 80	4 0	6 0	3 50	~~130~~ ~~80~~
~~2~~,~~3~~,3	A_3	5 70	8	12 0	7 0	~~170~~ 100
	Потребности	~~150~~ ~~70~~	120	~~80~~	~~50~~	400

$\min(170;70)=70$

β_j / α_i		~~2~~,2	~~1~~,3	~~1~~,5	4	
	B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
~~2~~,~~2~~,2	A_1	3 0	5 20	7 80	11 0	~~100~~ 20
~~2~~,3	A_2	1 80	4 0	6 0	3 50	~~130~~ ~~80~~
~~2~~,~~3~~,3	A_3	5 70	8 100	12 0	7 0	~~170~~ ~~100~~
	Потребности	~~150~~ ~~70~~	~~120~~ ~~100~~	~~80~~	~~50~~	400

$\min(20;120)=20$. Оставшаяся клетка 100.

$Z_Ф = 20\cdot5+80\cdot7+80\cdot1+50\cdot3+70\cdot5+100\cdot8=2040$

Таким образом, для рассматриваемого примера первоначальные решения ранжируются по критерию минимума стоимости перевозок в следующем порядке:

$$Z_{сзу} = 100 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 80 \cdot 4 + 40 \cdot 8 + 80 \cdot 12 + 50 \cdot 7 = 2300;$$

$$Z_{мэ} = 20 \cdot 3 + 80 \cdot 5 + 130 \cdot 1 + 40 \cdot 8 + 80 \cdot 12 + 50 \cdot 7 = 2220;$$

$$Z_{Ф} = 20 \cdot 5 + 80 \cdot 7 + 80 \cdot 1 + 50 \cdot 3 + 70 \cdot 5 + 100 \cdot 8 = 2040.$$

2.3. Формулировка критерия оптимальности решения ТЗ

Возникает вопрос – а существует ли еще более лучшее в смысле рассматриваемого критерия решение? Необходим критерий проверки решения на оптимальность.

При использовании симплекс-метода мы выражали линейную функцию задачи через неосновные (свободные) переменные, и по знакам коэффициентов β_{ij} делали соответствующий вывод.

По аналогии запишем выражение целевой функции для ТЗ

$$F = F_0 + \beta_{ij} x_{ij} + \dots, \tag{45}$$

где многоточием обозначены слагаемые, соответствующие всем свободным переменным, отличным от x_{ij}, а F_0 - значение целевой функции для рассматриваемого распределения.

Коэффициент β_{ij} при свободной переменной x_{ij} в выражении (45) называется *оценкой свободной клетки (i, j).*

Из выражения (45) следует, что оценка β_{ij} представляет собой приращение целевой функции $\beta_{ij} = F - F_0 = \Delta F$ при единичном приращении свободной переменной $x_{ij} = 1$. Поэтому, если все $\beta_{ij} \geq 0$, то увеличение какой-либо из свободных переменных приведет только к увеличению функции *F*, а значит к ухудшению решения.

Критерий оптимальности: базисное распределение поставок оптимально тогда и только тогда, когда оценки всех свободных клеток неотрицательны $\beta_{ij} \geq 0$.

Как найти оценки свободных клеток для фиксированного базисного распределения поставок? Рассмотрим эту задачу на примере.

Пример. Установить, является ли оптимальным базисное распределение поставок, представленное таблицей 1

Таблица 1

	20	110	40	110
60	1	2 60	5	3
120	1 20	6	5	2 100
100	6	3 50	7 40	4 10

Решение. Найдем, например, оценку свободной клетки (1,3). Для этого дадим в клетку (1,3) единичную поставку. При этом потребуется изменить поставки в заполненных клетках так, чтобы сохранился баланс по строкам и столбцам. (Будем полагать, что во всех свободных клетках, отличных от клетки (1,3), поставка останется нулевой.) Так, чтобы 3-й потребитель получил по-прежнему 40 единиц груза, поставку в клетке (3,3) следует уменьшить на 1. Для того чтобы 3-й поставщик отправил по-прежнему 100 единиц груза, поставку в клетке (3,2) увеличиваем на 1. 2-му потребителю нужно только 110 единиц груза, поэтому поставку в клетке (1,2) придется уменьшить на 1. Существенно, что найденный вариант перераспределения поставок, затрагивающий заполненные клетки и увеличивающий на 1 поставку клетки (1,3), единственный. Полученное распределение поставок представлено в табл.2.

Таблица 2

	20	110	40	110
60	1	2 59	5 1	3
120	1 20	6	5	2 100
100	6	3 51	7 39	4 10

Тогда, учитывая экономический смысл оценки свободной клетки, получаем, что

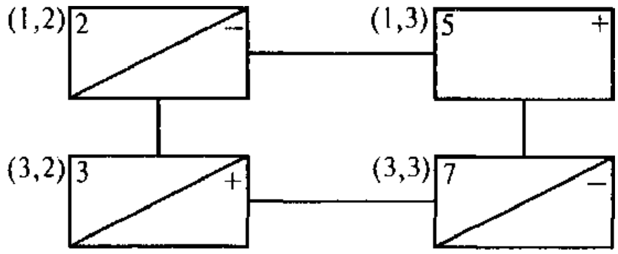
$$\beta_{13} = \Delta F = 5 - 7 + 3 - 2 = -1.$$

Так как среди клеток табл. 1 есть клетка с отрицательной оценкой, то распределение поставок не оптимально.

Проанализируем рассмотренный пример.

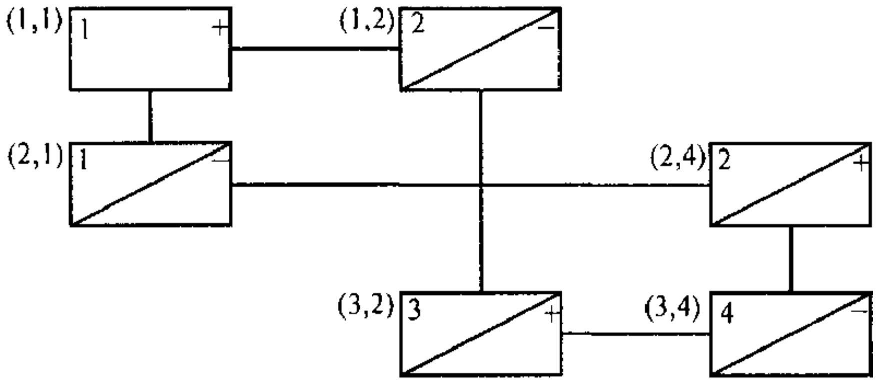
На оценку клетки β_{ij} оказывают влияние лишь коэффициенты затрат c_{kl} тех клеток, в которых поставка при рассматриваемом перераспределении изменится.

Ломаную, соединяющую клетки с изменяемой поставкой, будем называть ***циклом.*** При этом цикл замкнут, проходит только через базовые (ненулевые) клетки, за исключением оцениваемой, и содержит четное число вершин.



Аналогично, составляя означенный цикл пересчета **для каждой свободной клетки**, можно найти ее оценку. При этом, конечно, цикл не всегда будет получаться таким простым, как в разобранном примере для клетки (1,3).

Например, означенный цикл пересчета для клетки (1,1), показанный на следующем рисунке, более сложный.



Оценка клетки (1,1) в этом случае равна

$$\beta_{11} = (1 + 3 + 2) - (2 + 1 + 4) = -1.$$

Обратим внимание, что **знаки в вершинах цикла чередуются**, при этом в оцениваемой клетке стоит знак «+».

Использование рассмотренного метода оценки каждой свободной клетки слишком трудоемкий.

Заметим, что **значение оценки β_{ij} свободной клетки не изменится, если ко всем коэффициентам затрат c_{kl} какой-либо строки (столбца) таблицы прибавить произвольное число**.

Такие числа называются потенциалами строки (столбца).

Если подобрать потенциалы так, чтобы **коэффициенты затрат c_{kl} для всех базисных клеток были нулевыми**

$$c_{ij}^{*} = c_{ij} + U_i + V_j = 0, \qquad (46)$$

то коэффициенты затрат всех свободных клеток будут равны их оценкам

$$\beta_{ij} = c_{ij}^{*} = c_{ij} + U_i + V_j. \qquad (47)$$

Здесь U_i и V_j - потенциалы рассматриваемых строки и столбца соответственно.

Совокупность уравнений вида (47) для всех базисных клеток образует систему $(n+m-1)$ уравнений с $(n+m)$ переменными. Такая система имеет **бесконечное множество решений**. Чтобы система была определенной, обычно принимают $U_1 = 0$. Оставшиеся переменные находят из системы.

Пример. Найти оценки свободных клеток для распределения, представленного таблицей 1.

В скобках указан номер шага.

	$V_1 = 0(1)$	$V_2 = 0(6)$	$V_3 =$ -4(5)	$V_4 =$ -1(3)
$U_1 =$ -2(7)	1	2 60	5	3
$U_2 =$ -1(2)	1 20	6	5	2 100
$U_3 =$ -3(4)	6	3 50	7 40	4 10

Измененные коэффициенты затрат удобно выписать в виде отдельной *матрицы оценок*

$$c_{ij}^{*} = c_{ij} + U_i + V_j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \beta_{ij}. \qquad (48)$$

Поскольку в матрице оценок есть отрицательные элементы, то распределение не оптимально.

Можно подобрать различные наборы потенциалов, однако матрица оценок во всех таких случаях будет одинаковой. Решение транспортной задачи в случае получения неоптимального распределения поставок рассмотрим в следующем разделе.

2.4. Алгоритм решения ТЗ методом потенциалов

1) Составляем опорное решение задачи одним из известных методов.
2) Строим систему потенциалов $c_{ij}^{*} = c_{ij} + U_i + V_j = 0$ для базисных клеток.

3) Составляем матрицу оценок типа (48). **Если все оценки (элементы матрицы) неотрицательны $\beta_{ij} = c_{ij}^{*} \geq 0$, то оптимальный план найден**, если нет, то переходим к следующему шагу.
4) Выбираем клетку с максимальной по модулю отрицательной оценкой. Такая клетка называется максимально потенциальной.
5) Улучшаем план перевозок, составляя цикл, в одной из вершин которого находится максимально потенциальная клетка. Остальные вершины цикла находятся в заполненных (базисных) клетках. Вершины цикла, начиная с максимально не потенциальной клетки, обозначают знаками $+;-;+;-$.
6) Рассматривают перевозки x_{ij} только в отрицательных вершинах и находят среди них наименьшую $\Theta = \min$.
7) Перемещают эту минимальную перевозку по циклу, вычитая от перевозок с отрицательными вершинами и прибавляя к перевозкам с положительными вершинами. Получили новое распределение.
8) Переход к пункту 2.

Замечание: Если задача решается на **max,** то система потенциалов составляется так же, а условие оптимальности через оценки свободных клеток имеет вид:

$$\beta_{ij} = c_{ij}^{*} = c_{ij} + U_i + V_j \leq 0.$$

Пример: Пусть каким-либо образом получен первоначальный план перевозок.

V_j / U_i		$V_1= 0$ (7)	$V_2 = -5$ (2)	$V_3= -7$ (3)	$V_4= -2$ (5)	
	B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
$U_1=0$ (1)	A_1	3	5 30	7 10	11	**40**
$U_2= -1$ (6)	A_2	1 20	4	6	3 10	**30**
$U_3= -5$ (4)	A_3	5	8	12 5	7 15	**20**
	Потребности	**20**	**30**	**15**	**25**	**90**

$Z_1 = 150 + 70 + 20 + 30 + 60 + 105 = 435$

1) Составим систему потенциалов для заполненных клеток и матрицу оценок:

$$c_{ij}^* = c_{ij} + U_i + V_j = 0 \qquad \to \qquad U_i + V_j = -c_{ij}$$

$U_1 = 0$

$V_2 + U_1 = -5 \quad \to \quad V_2 = -5$

$V_3 + U_1 = -7 \quad \to \quad V_3 = -7$

$V_3 + U_3 = -12 \quad \to \quad U_3 = -5 \qquad c_{ij}^* = c_{ij} + U_i + V_j = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \beta_{ij}$

$V_4 + U_3 = -7 \quad \to \quad V_4 = -2$

$V_4 + U_2 = -3 \quad \to \quad U_2 = -1$

$V_1 + U_2 = -1 \quad \to \quad V_1 = 0$

План не оптимален, т.к. есть отрицательные элементы.

2) Выбираем клетку с максимальной по модулю отрицательной оценкой, но они равны. Следовательно, можно брать любое значение.

3) Составим цикл с клеткой β_{32}:

V_j \ U_i					
	B_j \ A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	3	5 30 −	7 10 +	11
	A_2	1 20	4	6	3 20
	A_3	5	8 * +	12 5 −	7 15

$\Theta_{\min}\{30;5\} = 5$

4) Перемещаем отрицательную перевозку «5» по циклу, вычитая ее от клеток с отрицательными перевозками и прибавляя к клеткам с положительными перевозками.

V_j \ U_i		**-2**	**-5**	**-7**	**-4**
	B_j \ A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
0	A_1	3	5 25	7 15	11
1	A_2	1 20	4	6	3 10
-3	A_3	5	8 5	12	7 15

$$Z_2 = 125 + 105 + 20 + 30 + 40 + 105 = 425 < Z_1$$

3) Заново составим систему потенциалов для заполненных клеток и матрицу оценок:

$$c_{ij}^* = c_{ij} + U_i + V_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \beta_{ij}$$

План оптимален, т.к. в матрице оценок пустых клеток нет отрицательных элементов.

Задания для решения в аудитории

Задача. В трех пунктах отправления A_1, A_2, A_3 сосредоточен груз в количествах a_1, a_2, a_3. Этот груз следует доставить в каждый из четырех пунктов назначения B_1, B_2, B_3, B_4 в количестве b_1, b_2, b_3, b_4. Стоимость перевозок единицы груза из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения равна c_{ij}. Определить план перевозок методом северо-западного угла и методом минимального элемента, чтобы стоимость перевозок была наименьшей.

Проверить на оптимальность методом потенциалов (воспользоваться опорным планом, составленным по методу min элемента).

1.

B_j / A_i		B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
	V_j / U_i					
A_1		2	3	5	4	100
A_2		1	4	2	3	20
A_3		3	5	2	1	40
Потреб-ности		50	40	10	60	

2.

B_j / A_i		B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
	V_j / U_i					
A_1		4	3	2	1	20
A_2		3	3	5	6	30
A_3		6	7	9	12	50
Потребности		20	20	30	40	

3. Из трех холодильников A_i, $i=\overline{1,3}$, вмещающих мороженную рыбу в количествах a_i т, необходимо последнюю доставить в пять магазинов B_j, $j=\overline{1,5}$ в количествах b_j т. Стоимости перевозки 1т рыбы из холодильника A_i в магазин B_j заданы в виде матрицы C, 3×5.

Спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной. Решить методом потенциалов.

$$b_1=150$$
$$b_2=140$$
$$b_3=110$$
$$b_4=230$$
$$b_5=220$$

$$a_1=320 \quad a_2=280 \quad a_3=250$$

$$C\begin{pmatrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 24 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 6 & 11 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1 (Типовые варианты)

1. Формализовать ЗЛП и решить ее геометрическим методом.
2. Выполнить анализ модели на чувствительность:
   - анализ пределов изменений дефицитных ресурсов с определением наиболее выгодного из них
   - анализ пределов изменений недефицитных ресурсов
   - анализ пределов изменения коэффициентов целевой функции

Вариант 1.

Фермер имеет 10 га пашни и 460 человек трудовых ресурсов планирует использовать на производство картофеля и лука с целью получения максимальной прибыли. Сбыт по видам не ограничен.

Показатели	Картофель	Лук
Затраты труда на 1 га, чел.-дней	40	50
Урожайность, ц/га	200	110
Себестоимость 1ц в тыс. руб.	100	200
Цена реализации 1ц, тыс. руб.	150	300

Вариант 2.

При изготовлении изделий $И_1$ и $И_2$ используется сталь и цветные металлы, а также токарные и фрезерные станки. По технологическим нормам на производство единицы изделия $И_1$ требуется 300 и 200 станко-часов соответственно токарного и фрезерного оборудования, а также 10 и 20 кг соответственно стали и цветных металлов. Для производства единицы изделия требуется 400, 100, 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов.

Цех располагает 12400 и 6800 станко-часами соответственно токарного и фрезерного оборудования и 640 и 840 кг соответственно стали и цветных металлов. Прибыль от реализации единицы изделия $И_1$ составляет 6 руб. и от единицы изделия $И_2$ — 16 руб.

Постройте математическую модель задачи, используя в качестве показателя эффективности прибыль и учитывая, что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

Вариант 3.

Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 условных единиц (усл. ед.), жиров — не менее 70 и витаминов — не менее 10 усл. ед. Содержание их в каждой единице продуктов $П_1$ и $П_2$ равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1) усл. ед. Стоимость 1 ед. продукта $П_1$ — 2 руб., $П_2$ - 3 руб.

Постройте математическую модель задачи, позволяющую так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ.

Вариант 4.

В районе лесного массива имеются лесопильный завод и фанерная фабрика. Чтобы получить 2,5 м^3 коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2,5 м^3 еловых и 7,5 м^3 пихтовых лесоматериалов. Для приготовления листов фанеры по 100 м^2 требуется 5 м^3 еловых и 10 м^3 пихтовых лесоматериалов. Лесной массив содержит 80 м^3 еловых и 180 м^3 пихтовых лесоматериалов.

Согласно условиям поставок, в течение планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 10 м^3 пиломатериалов и 1200 м^3 фанеры. Доход с 1 м^3 пиломатериалов составляет 160 руб., а со 100 м^2 фанеры — 600 руб.

Постройте математическую модель для нахождения плана производства, максимизирующего доход.

Примечание: При построении модели следует учесть тот факт, что пиломатериалы могут быть реализованы только в виде неделимого комплекта размером 2,5 м^3, а фанера - в виде неделимых листов по 100 м^2.

Вариант 5.

С вокзала можно отправлять ежедневно курьерские и скорые поезда. Вместимость вагонов и наличный парк вагонов на станции указаны в таблице.

Характеристики парка вагонов	Тип вагона				
	багажный	почтовый	плацкартный	купейный	мягкий
Число вагонов в поезде, шт.:					
курьерском	1	-	5	6	3
скором	1	1	8	4	1
Вместимость вагонов, чел.	-	-	58	40	32
Наличный парк вагонов, шт.	12	8	81	70	27

Постройте математическую модель задачи, на основании которой можно найти такое соотношение между числом курьерских и скорых поездов, чтобы число ежедневно отправляемых пассажиров достигло максимума.

Вариант 6.

Имеются два изделия, которые должны в процессе производства пройти обработку на четырех станках: 1, 2, 3 и 4. Время обработки каждого изделия на каждом из этих станков задано в таблице. Станки 1, 2, 3 и 4 вида можно использовать соответственно в течение 45, 100, 300 и 50 часов. Продажная цена изделия *A* — 6 руб., *B* — 4 руб. В каком отношение следует производить изделия *A* и *B*, чтобы получить максимальную прибыль?

Станки / Изделия	1	2	3	4
A	2	4	3	1
B	*1*	2	1	4

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

1. Построить на плоскости область допустимых решений задачи и геометрически найти максимум или минимум функции цели.
2. Составить М-задачу и решить ее.
3. Составить двойственную задачу линейного программирования.

Вариант №1

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 97; \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \\ x_1 + 7x_2 \ge 77 \end{cases}$$

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

Вариант №2

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50;\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \\ -x_1 + 4x_2 \ge 19 \end{cases}$$

$$Z = x_1 + 5x_2 \to \min$$

Вариант №3

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 53 \\ x_1 - x_2 \le 3 \quad ; \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 71 \end{cases}$$

$$Z = 9x_1 + 2x_2 \to \max$$

Вариант №4

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \ge 17 \\ x_1 + 2x_2 \le 34 \quad ; x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 17 \end{cases}$$

$$Z = 5x_1 + 3x_2 \to \max$$

Вариант №5

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26 \quad ; x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \\ x_1 + 4x_2 \ge 26 \end{cases}$$

$$Z = 5x_1 + 7x_2 \to \min$$

Вариант №6

$$\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \ge 24 \\ 9x_1 + 4x_2 \le 110;\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \\ -2x_1 + 7x_2 \ge 15 \end{cases}$$

$$Z = 9x_1 + 2x_2 \to \max$$

Вариант №7

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29 \\ 3x_1 - x_2 \le 14 \quad ; x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38 \end{cases}$$

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$$

Вариант №8

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_1 - 3x_2 \le 37 \quad ; x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20 \end{cases}$$

$$Z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

Вариант №9

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \ge 57 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 53; x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \\ 6x_1 - 7x_2 \le 15 \end{cases}$$

$$Z = 5x_1 + x_2 \to \max$$

Вариант №10

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 6 \\ 9x_1 + 8x_2 \le 157 \quad ; x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \\ -3x_1 + 11x_2 \ge 16 \end{cases}$$

$$Z = x_1 + x_2 \to \min$$

Вариант №11

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 97; x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \\ x_1 + 7x_2 \ge 77 \end{cases}$$

$$Z = 7x_1 + 2x_2 \to \min$$

Вариант №12

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50;\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \\ -x_1 + 4x_2 \ge 19 \end{cases}$$

$$Z = 6x_1 + x_2 \to \max$$

Вариант №13

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 53 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 71 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = x_1 + 7x_2 \to \max$$

Вариант №14

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \ge 17 \\ x_1 + 2x_2 \le 34 \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 17 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = x_1 + 9x_2 \to \min$$

Вариант №15

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26 \\ x_1 + 4x_2 \ge 26 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = x_1 + 8x_2 \to \min$$

Вариант №16

$$\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \ge 24 \\ 9x_1 + 4x_2 \le 110 \\ -2x_1 + 4x_2 \ge 15 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = x_1 + 7x_2 \to \max$$

Вариант №17

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29 \\ 3x_1 - x_2 \le 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = 4x_1 + x_2 \to \min$$

Вариант №18

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_1 + 3x_2 \le 37 \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = x_1 + 4x_2 \to \max$$

Вариант №19

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \ge 57 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 53 \\ 6x_1 - 7x_2 \ge 15 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = 2x_1 + 5x_2 \to \min$$

Вариант №20

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 6 \\ 9x_1 + 8x_2 \le 157 \\ -3x_1 + 11x_2 \ge 16 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = 8x_1 + 5x_2 \to \min$$

Вариант №21

$$\begin{cases} 2x_2 \le 5 \\ 8x_1 + 2x_2 \le 89 \\ 8x_1 - 6x_2 \ge 69 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = 7x_1 - 4x_2 \to \max$$

Вариант №22

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \le 51 \\ 2x_2 \le 1 \\ 10x_1 + 4x_2 \ge 69 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = 11x_1 + 7x_2 \to \min$$

Вариант №23

$$\begin{cases} 11x_1 - 17x_2 \le 66 \\ -x_1 + 11x_2 \le 14 \\ 5x_1 - 3x_2 \ge 14 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = 13x_1 - 2x_2 \to \min$$

Вариант №24

$$\begin{cases} 8x_1 + 14x_2 \ge 14 \\ 13x_1 + 5x_2 \le 100 \\ 5x_1 - 9x_2 \ge 5 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = 11x_1 + 7x_2 \to \max$$

Вариант №25

$$\begin{cases} x_1 - 9x_2 \le 18 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 3 \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 27 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = 3x_1 + x_2 \to \min$$

Вариант №26

$$\begin{cases} 9x_1 + 11x_2 \ge 48 \\ 5x_1 - x_2 \le 44 \\ -x_1 + 13x_2 \le 6 \end{cases};\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$Z = 6x_1 + 4x_2 \to \max$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Исследование операций в экономике: Учебное пособие / под ред. проф. Н.Ш.Кремера. -2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2010. – 430с.

2. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 2006. - 432 с: ил.

3. Косоруков О.А,, Мищенко А.В. Исследование операций: Учебник / Косоруков О.А., Мищенко А.В. // Под общ. ред. д.э.н., проф. Н.П. Тихомирова. — М: Издательство «Экзамен», 2003. — 448с.

4. Минюк С. А. Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособие / Минюк С. А., Ровба Е. А., Кузьмич К. К. — Мн.: ТетраСистемс, 2002. - 432 с.

5. Литвин Д.Б. Линейное программирование: Учебное пособие / Д.Б. Литвин, О.Н. Таволжанская, А.А. Яновский. – Ставрополь : Сервисшкола, 2016. – 72с.

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 07.02.2018. Бумага офсетная. Гарнитура "Times".
Формат 60×84/8. Усл. печ. л. 5,04. Тираж 100 экз. Заказ №12.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии "Сервисшкола",
355011, г.Ставрополь, ул. 45-я Параллель, 36, те./факс.: (8652) 57-47-27, 57-47-25,
http://книга-ставрополь.рф, e-mail: s-school@mail.ru